# La Formación de Profesores

## Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento

María Rita Otero


ISBN 978-950-658-551-8

Otero, María Rita

La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento / María Rita Otero. - 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2021.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-658-551-8

1. Docentes. 2. Matemática. 3. Ciencias de la Educación. I. Título.

CDD 510.7

Imagen de tapa y contratapa María Rita Otero. Tandil (2021)

A mis padres, por la educación que me dieron

# La Formación de Profesores

## Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento

María Rita Otero

Indice

# Capítulo 1

# LA TEORIA ANTROPOLOGICA DE LO DIDACTICO Y LA TRANSPOSICION DIDACTICA

# La Transposición Didáctica

La noción de Transposición Didáctica ingresó al campo de la didáctica de las matemáticas gracias a los trabajos de Yves Chevallard (1985, 1992), siendo uno de los conceptos más difundidos de su obra. Las implicaciones didácticas que surgen del reconocimiento del proceso traspositivo, se dimensionan mejor retrospectivamente, cuando ya han transcurrido veinticinco años de ese hecho. En las formulaciones sucesivas de la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) Chevallard (1985, 1991, 1992) sentó las bases de los problemas fundacionales de lo que hoy conocemos como la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 2007).

> *"El proceso de transposición didáctica se refiere a las transformaciones que un objeto o un cuerpo de conocimiento experimenta desde el momento en que se produce, se pone en uso, se selecciona y se diseña para ser enseñado, hasta que realmente se enseña en una institución educativa determinada."* (Chevallard & Bosch, 2014, p. 170)

Es importante recordar aquí, que en el idioma español y en el francés, se distingue entre conocimiento y saber. El término conocimiento, se refiere a los recursos cognitivos concebidos o adquiridos por un sujeto, que se conservan en su memoria. El saber, por su parte, alude a un conjunto más o menos coherente de enunciados y de prácticas, reconocidos por una cierta comunidad de referencia, en un dominio dado -artesanal, profesional, científico, etc.- (Otero, 2019). Se admite la existencia de saberes, en plural, se hablará entonces de las matemáticas y no solo de la matemática.

La noción de transposición didáctica resulta nuclear para la formación de profesores, como intentaremos

argumentar en lo sucesivo. Examinemos un poco más de cerca el proceso traspositivo. El saber “sabio”, preferimos decir académico, se produce y se comunica en una cierta comunidad científica de referencia. Podrían incluirse en dicho ámbito también a los usuarios expertos del saber, por ejemplo, a los tecnólogos. Esta es una primera fase del proceso traspositivo.

Pensemos en el caso de Albert Einstein, en su artículo publicado el 26 de setiembre de 1905: *"Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento"*, él define allí la noción de simultaneidad, a la vez que propone los dos postulados relativistas a partir de los cuales ella se infiere: la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y la relatividad de la simultaneidad. Este artículo, podría considerarse como el nacimiento y la primera transposición oficial de la Teoría Especial de la Relatividad (TER).

Una segunda gran etapa de la transposición, se desarrolla en una entidad teórica, que Chevallard denomina metafóricamente *nóosfera*[1]. Es aquí donde se selecciona e incluso se secciona el saber propuesto para ser enseñado. Los representantes de la política, de las asociaciones gremiales de docentes, los expertos que representan al saber académico, los empresarios, los padres, las instituciones religiosas, los expertos en curriculum, etc. integran la noósfera. Un ejemplo de febril actividad noosférica en Argentina, ocurrió con la Ley Federal de Educación en la década del 90. El poder transpositivo de la noósfera, se ejerció de tal manera que los contenidos para la educación preescolar, primaria y secundaria, así como para la formación de maestros y profesores se escribieron y sancionaron por ley. Así, por

[1]El concepto fue desarrollado por Teilhard de Chardin y también por Le Roy y Vernadski. http://teilhard.net/noosfera/

ejemplo, el Congreso de la Nación legisló que las ecuaciones diferenciales debían enseñarse en la escolaridad secundaria. Del mismo modo, fue excluida de la escuela secundaria la enseñanza del francés y se redujeron las horas destinadas a enseñar física, a su mínima expresión.

Retomando el ejemplo de Einstein y la Teoría Especial de la Relatividad mencionado antes, se puede apreciar que la noósfera demoró muchos años en proponer a la TER como saber a enseñar en el curriculum de la escuela secundaria, y lamentablemente, es muy raro encontrarla en el saber enseñado en dicha institución. La enunciación de los dos postulados de la relatividad realizada en 1905, difiere de la que leemos hoy en los libros de física que se usan para enseñar la TER. La teoría continúa siendo objeto de transposición didáctica, al menos en el ámbito de los especialistas en didáctica de la Física, pero a más de cien años de su aparición, la Relatividad Especial, no se difunde en la enseñanza secundaria.

La fórmula física con mayor difusión mediática en la historia es $E = mc^2$ que relaciona la masa y la energía relativista. Esta relación, fue esbozada y publicada por Einstein el 21 de noviembre de 1905, en el artículo: *"¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?"*. Si bien allí, la famosa fórmula no se presenta como la escribimos hoy, Einstein deduce que *"si un cuerpo entrega una energía E en forma de radiación, su masa disminuye en $E/c^2$"*, afirmación que es equivalente a relación entre la masa y la energía. Sin embargo, la gran difusión de la expresión matemática, no es atribuible a la escuela, sino a otras instituciones sociales, lo cual evidencia el carácter eminentemente social del proceso traspositivo, que no se restringe exclusivamente a la institución escolar.

Pero, aunque se disponga de un curriculum nacional y federal e incluso de programas oficiales jurisdiccionales; en cada institución educativa se diseñan, seleccionan y formulan legítimamente otros saberes, que originan otros programas. Esta es la tercera gran fase del proceso traspositivo, que conlleva una gran variedad de intersticios y matices. El saber propuesto para enseñar, resulta nuevamente trasformado para tornarlo enseñable, y de allí, en enseñado. Finalmente, el resultado de la enseñanza se plasma en el saber aprendido, que naturalmente, suele distar bastante de aquello que fue enseñado.

La Teoría de la transposición didáctica, brinda a los didactas y a la didáctica científica, un instrumento de emancipación epistemológica e institucional. Esta liberación, consiste en una ruptura doble: por un lado, con el saber académico, y por otro, con el saber a enseñar y el enseñado, sujeto a las regulaciones y condiciones que establecen la noósfera, la *escuela* [2]y la sociedad.

Es epistemológicamente necesario que la didáctica y el didacta se distancien de su objeto de estudio: la difusión del saber y sus transformaciones. Esta toma de distancia ya fue planteada por Bourdieu (2001) en relación a las ciencias sociales, se refiere a que el conocimiento científico de la realidad social debe construirse *"contra la ilusión del saber inmediato"* es decir, en un movimiento de ruptura, a lo que los investigadores creen saber, entender, interpretar, conocer. Esto plantea al didacta, el problema de la posición institucional desde la cual "mira" el saber. Para analizar los hechos didácticos, es preciso adoptar un

[2] En la TAD, el término escuela designa a cualquier institución educativa. Se usa con el sentido que proviene del latín schola, y ésta del griego σχολή (scholé), que significa ocio, tiempo libre. En la Grecia clásica de Aristóteles y Platón, el aprendizaje se relacionaba con el ocio, el entretenimiento y el interés individual, lejos de las obligaciones y del trabajo. En latín, la escuela ofrece tanto un espacio como un tiempo, para dedicarse libremente al estudio y al desarrollo de las potencialidades individuales.

punto de vista y un sistema de referencia -relativos- explícitos, a través de los cuales el didacta relativiza la mirada sobre el saber y establece sus presupuestos.

Extraemos aquí una primera consecuencia para la formación de profesores en particular y para enseñanza en general: el saber no es único, no es neutro, ha pasado por procesos de descontextualización y despersonalización, ha sido segmentado y textualizado en diversos formatos, en los intentos de difusión. El profesor tiene que incorporar el cuestionamiento del saber a su práctica profesional.

## El saber de referencia

¿Cuál es el saber de referencia respecto del cual se estudian los efectos traspositivos que, son de hecho inevitables e incontrolables?

Contrariamente a lo que se suele afirmar cuando se malinterpreta la noción de transposición didáctica, incluso en el ámbito de la pedagogía erudita, y se afirma que es preciso realizar una *"buena transposición"*, es importante destacar que la transposición no es ni "buena" ni "mala", simplemente es. Esto no implica que no sea posible y necesario para el didacta y para los investigadores en didáctica, analizar qué se transforma, como lo hace y con respecto a qué.

Chevallard señala reiteradamente, que no existe una *"referencia privilegiada"* a partir de la cual el didacta observe, analice y juzgue el mundo de los saberes. El *"saber sabio"* es una *función*, no una sustancia, respecto del cual el didacta debe tomar distancia, independizarse (Chevallard, 2007). En consecuencia, el saber escolar no puede considerarse como una declinación del saber académico, ni como su versión light. El saber escolar, tiene un modo de funcionamiento propio, diferente del saber sabio, por eso hay transposición.

El didacta, debe tomar distancia del saber académico, y también del saber escolar. Es decir que tampoco el didacta puede considerar a la institución donde vive el saber enseñado, cómo un sistema de referencia privilegiado y autónomo, ajeno y aislado de los procesos históricos y sociales.

La transposición didáctica pone en evidencia la relatividad institucional del saber, y expande el sentido de la transposición, al asumir la existencia de una transposición institucional. El saber migra de una institución a otra, si se adapta y se transforma, sobrevive y si no lo hace, muere.

Existen numerosos ejemplos de obras que, aun estando presentes en el curriculum por designio de la noósfera, jamás se encuentran entre los saberes enseñados. Ya mencionamos en física a la TER, en la enseñanza secundaria, o a las probabilidades en matemáticas, etc. Otros saberes, se transforman hasta volverse irreconocibles para la comunidad académica, mientras tienen vida propia en la escuela. Por ejemplo, la expresión *baskara* o "fórmula resolvente" son una suerte de "ábrete sésamo" en la escuela secundaria, donde no es preciso aclarar que se está aludiendo a una fórmula para determinar las raíces de una ecuación cuadrática en una variable.

La transposición didáctica y el análisis de los saberes, desnudan la existencia de por lo menos dos formas contrapuestas y no superponibles en las que funciona el saber: una es propia del saber académico y la otra, corresponde al saber escolar.

Así, cuando se mira al saber enseñado en la escuela desde un sistema de referencia externo a ella, se habilitan preguntas tales como ¿Qué es *esto* que aparece como saber enseñado? ¿Cuál es su relación con el saber de los científicos, o el de los tecnólogos? ¿Qué distancia existe

entre unos y otros? Y más específicamente: ¿por qué existe un bloque curricular denominado: *¿algebra y funciones,* como si el objeto función fuera escindible del corpus del algebra? ¿por qué el estudio del álgebra escolar se propone como una generalización de la aritmética? O en la física escolar: ¿por qué no se estudian la adición de velocidades ni la relatividad galileana en la cinemática clásica? ¿por qué no se enseñan las oscilaciones, ni la TER ni la mecánica cuántica? O en Química: ¿por qué los esquemas de la configuración electrónica de un cierto elemento de la tabla periódica y su construcción se enseñan como un fin en sí mismo?

Estos cuestionamientos y otros tantos similares, adquieren legitimidad didáctica cuando se asume la existencia de la trasposición didáctica, y de la vida propia de los saberes en una institución. La TAD ofrece y perfecciona los instrumentos para cuestionar los saberes escolares, para interrogarse sobre sus fuentes de legitimidad, sobre su economía, su ecología y su utilidad (Chevallard, 2001 c).

Pero si no existe una referencia privilegiada, o un sistema de referencia absoluto respecto del cual analizar las variaciones y transformaciones del saber, y, por el contrario, este es relativo a las instituciones ¿qué opciones le quedan al especialista en didáctica? La respuesta es que el análisis y la formulación de los problemas didácticos, debe partir de la construcción de un modelo de referencia explícito, que nunca es ni absoluto ni definitivo. La TAD denomina a este sistema: Modelo Praxeológico de Referencia, noción sobre la que volveremos más adelante.

La consecuencia relevante para la formación de los profesores, es que el saber cambia permanentemente, aun cuando en la escuela e incluso en la formación docente, se lo naturalice y se genere una cierta ilusión de permanencia e inmutabilidad.

# Una nueva concepción de la Didáctica

La Teoría de la transposición didáctica (Chevallard 1985, 1990, 1991) establece de manera incipiente, lo que luego será explicitado en la TAD: el objeto de estudio de la didáctica científica es la difusión[3] o no difusión social de los saberes matemáticos, físicos, químicos, didácticos, etc. La TDD propone entonces una reformulación de la Didáctica y de su objeto de estudio. Desde esta perspectiva, la didáctica amplía sus horizontes, y se ocupa del estudio de la difusión (o la no-difusión) de los saberes en las instituciones de una sociedad, o más ampliamente de una civilización, donde la escuela es solo una institución más a considerar (Chevallard, 2007).

El objeto de estudio de la didáctica resulta así extendido, va mucho más allá de la enseñanza en un aula en una cierta escuela, involucra a las instituciones sociales, y no solo a las personas, lo que se difunde o no, son los saberes, en tanto que productos culturales. Esta es la condición antropológica *sine qua non*, a partir de la cual, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrolla instrumentos para analizar y explicar los procesos traspositivos. La difusión social de los saberes se analiza por medio de una estructura denominada Escala de los niveles de codeterminación didáctica, que consideramos en una sección aparte.

La perspectiva antropológica, permite analizar y comprender las modificaciones que sufren los saberes matemáticos, físicos, químicos, biológicos, etc., en el trascurso de su difusión, así como el papel que los didactas y los profesores pueden tener en dicho proceso.

---

[3] La palabra difusión, del latín diffusio, se refiere a la comunicación extendida de un mensaje. Difundir, alude a la acción de propagar, divulgar o esparcir, en este caso el saber, en la sociedad.

Los efectos traspositivos que operan sobre el saber, siempre cambiante, lo vuelven un término indispensable de la ecuación didáctica y cuestionan el saber a enseñar, en lugar de invisibilizarlo o transparentarlo. Se trata de un enfoque epistémico de la didáctica, que se interroga sobre el saber propuesto para enseñar en una cierta institución y sobre el saber enseñado: ¿Por qué en la escuela secundaria se estudia de manera central y exclusiva la resolución de ecuaciones cuadráticas de una variable, mientras las cúbicas o las de otro orden, no se estudian? ¿Por qué las probabilidades no se estudian en la escuela, aunque el currículum las propone?

## La dimensión antropológica

¿Qué significa y qué implica en este contexto, proponer una teoría didáctica antropológica?

Esta idea no es nueva en la teoría educacional, y quizás, con un significado diferente al que le atribuye la TAD, ha sido utilizada entre otros, por los sociólogos Postman & Weintgartner (1969). Ellos afirman, como se viene diciendo desde los trabajos de Dewey (1902), que la escuela es una institución desacoplada de las necesidades sociales, y abogan por una nueva educación. Por eso, proponen que las escuelas promuevan en los estudiantes una herramienta intelectual a la que consideran “subversiva", denominada *perspectiva antropológica*, porque debería permitir a las personas *“ser parte de su propia cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella”*.

Se trata de lograr que los educandos desarrollen una postura crítica, que les permita separarse de las limitaciones intelectuales y sociales de la propia “tribu”, alejándose de todo aquello que se naturaliza como verdadero, por el solo hecho de haber nacido en una cierta cultura tribal.

> *“Quite arbitrarily, one's perception of what is 'true' or real is shaped by the symbols and symbol-manipulating institutions of his tribe.” [“De manera bastante arbitraria, la percepción que uno tiene de lo que es "verdadero" o real está determinada por los símbolos y las instituciones manipuladoras de símbolos de su tribu.”*] (ibid., p. 8)

En principio, la concepción antropológica de la TAD parece compatible con este punto de vista genérico, ya que, para lograr la perspectiva antropológica que reclaman Postman y Weintgartner, la educación a todo nivel, debería equipar a los ciudadanos para ejercer un cuestionamiento permanente. Sin embargo, la TAD propone que la instrucción produzca este resultado en las diversas instancias educativas de la sociedad, y no solo en una única institución, que usualmente se designa como escuela.

La TAD sitúa a la didáctica en el campo de la antropología del conocimiento (Chevallard, 1991,1992), es decir, en el estudio de como las culturas producen y difunden conocimiento. En consecuencia, frente a la pregunta ¿dónde se encuentran los hechos didácticos? la TAD responde que ellos están en las todas las situaciones sociales. No hay instituciones ni actividades privilegiadas, es decir que, la actividad matemática y la actividad científica, son solo un elemento más, del vasto conjunto de los diversos tipos de actividades humanas.

En la TAD, el adjetivo "didáctico" se aplica a cualquier acción intencional de ayudar a alguien a estudiar algo. En todo hecho didáctico, existe una terna de conjuntos: la institución que enseña Y, la que aprende X, y lo que va a ser enseñado y aprendido.

La transposición didáctica evidencia que el objeto *O* sufre trasformaciones, que es preciso analizar, incluso, mucho más allá de la relación entre el estudiante y aquello que debe estudiar en un aula concreta, con la ayuda de un

profesor, así, el campo didáctico se amplía considerablemente traspasando largamente las aulas escolares.

Para la TAD, cualquier cosa es un objeto, así se dirá que *"todo es un objeto"*. Sin embargo, hay algunos tipos de objetos centrales en la antropología cognitiva tales como las instituciones, las personas y las posiciones que dichas personas ocupan en las instituciones. Las posiciones que los individuos ocupan en una institución, producen ciertas formas de actuar, siendo esto, lo que los transforma en sujetos, en el sentido de atados a las instituciones, que los sujetan sin que puedan independizarse completamente de ellas (Bosch & Chevallard, 1999).

Un objeto O existe como tal, si existe un sujeto o una institución que se relaciona con dicho objeto, y lo reconoce. La relación se refiere a las prácticas sociales que involucran al objeto en cuestión y que se realizan en la institución (Bosch & Chevallard, 1999). Es decir que ningún objeto existe "per se", ni de manera independiente de las prácticas humanas en las que interviene.

La mera relación $R(x, O)$ de una persona $x$ con un objeto de estudio $O$, no es el centro de interés de la TAD. Puesto que dicha relación, ocurre en una institución social $I$, donde la vinculación de la persona con el objeto, resulta caracterizada por el tipo de prácticas que las personas que ocupan una cierta posición $p$ en $I$ realizan con O, son las relaciones institucionales las que interesan a la TAD, a las cuales escribe como $R_I(p, O)$. Las relaciones con un objeto de saber son diferentes en la posición de estudiante de primaria, que en la de secundaria, que en la de profesor de cualquiera de esos tipos de estudiantes, que en la de padre que ayuda a estudiar a su hijo, o que en la de didacta.

La TAD propone una tríada didáctica generalizada donde el sistema didáctico se define y simboliza por $S(X, Y, O)$, en donde $X$ representa el conjunto de los

estudiantes $x \in X$, $Y$ el conjunto de las ayudas al estudio $y \in Y$, que pueden ser una o varias, además de un conjunto de obras u objetos $O$ a estudiar.

Esta descripción se puede aplicar tanto a los sistemas didácticos del tipo $S(x, y, O)$ propios de un aula escolar en particular, como a los múltiples sistemas didácticos, más o menos informales, que existen en la sociedad: en la escuela, en las familias, en internet, en las redes sociales, en los clubes, los museos, etc. (Chevallard & Sensevi, 2014).

En cualquier sistema didáctico $S(x, y, O)$, $y$ interactúa con $x$, para *ayudarle con el estudio* de $O$, esto lleva a decir que $y$ realiza gestos didácticos. Cuando $x$ estudia esa obra por sí mismo, también se dirá que realiza gestos didácticos relativos a $O$.

Para generalizar y describir a escala social, la relación de una persona $x$ con un objeto O, la TAD produce el instrumento teórico denominado praxeología. El término, designa a un modelo único, con el cual, es posible modelar cualquier actividad humana regularmente realizada (Chevallard, 1999). La palabra *regularmente*, significa que una praxeología no es algo fortuito, sino que es realizado con relativa continuidad y tampoco es, una actividad individual. La noción de praxeología expresa el carácter antropológico y pragmático de la TAD.

Entonces, utilizando la noción de praxeología, se dirá que la relación entre $x$ y O, es el conjunto de todas las actividades que la persona realiza con el objeto, o el conjunto de usos del objeto en todas las praxeologías involucradas con él, en las cuales la persona ha intervenido (Bosch & Chevallard, 1999). Las praxeologías se refieren a cualquier dominio de acción. Se necesita una praxeología para resolver una ecuación, para lavarse las manos, componer una canción, hacer las compras en el supermercado, preparar el desayuno, etc.

Según la TAD, cualquier acción humana puede modelarse como una secuencia de tareas $t_1$ , $t_2$ , $t_3$ ..... $t_n$ , que se corresponden con tipos o clases de tareas $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ ..... , $T_n$ que se realizan por medio una secuencia de praxeologías 1,2,3 ... $n$.

Es frecuente que Chevallard se refiera a las praxeologías como obras. En el ámbito de la TAD, obra u obras[4], designan a cualquier creación humana, material o no, que ha sido producida deliberadamente para cumplir una función definida (Chevallard, 2012a). Existen obras "de matemáticas", "de albañilería", "de física" de "química", de "biología, de "arte", etc., cuyo objetivo es alcanzar alguna función praxeológica, útil. En consecuencia, no habría razones para que una obra sea considerada "noble", "loable", "o recomendable" en sí misma.

Una nueva consecuencia para la formación de profesores, es que las obras matemáticas son un producto cultural entre otros, creadas para cumplir una función.

## Praxeología

Una praxeología consiste en la unión de un componente de práctica o praxis [T/ $\tau$], con otro de logos [$\Theta$ / $\theta$], entendido como un discurso sobre la praxis, aun cuando este sea muy germinal, que describe y justifica una cierta actividad. Formalmente, una praxeología es una 4-upla que se escribe [T/ $\tau$ / $\Theta$ / $\theta$] cuyos componentes son:

1. un tipo de tareas T;
2. una técnica $\tau$, es decir una manera de realizar las tareas del tipo T;

[4] Obra, es la traducción del sustantivo femenino singular francés oeuvre, que proviene del latín opera, en principio opus, operis "ouvrage, acte, travail", utilizado en el sentido del trabajo y de la actividad y también en el sentido de una obra de arte.

3. una tecnología $\theta$, es "un discurso racional" sobre la técnica $\tau$, que pretende justificarlo, hacerlo legítimo e inteligible.
4. una teoría $\Theta$, que permite generar, legitimar y justificar $\theta$. (Chevallard, 1999)

T: una tarea, casi siempre conlleva un tipo de tareas *asociado* y se expresa por un verbo: hacer un asado, sumar dos fracciones, demostrar un cierto teorema, estacionar un automóvil, calcular la concentración de una solución, ajustar una ecuación química, describir el movimiento de un objeto, resolver la ecuación $\mathrm{x}^2 - \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}$, etc. *Demostrar*, *Calcular*, etc., no son tipos sino géneros de tareas, que necesitan un determinativo. Todo tipo de tarea es una *construcción institucional*, cuya reconstrucción en otra institución, por ejemplo, en una cierta aula escolar, es un problema completo y complejo, *que es objeto de estudio de la didáctica*.

$\tau$: Se refiere a las técnicas o maneras de realizar las tareas del tipo T. En general hay más de una técnica y unas pueden ser más apropiadas que otras, siendo su alcance limitado. Tampoco las técnicas son necesariamente algoritmos. En las instituciones sociales, suele reconocerse y naturalizarse solo un pequeño conjunto de técnicas relativas al tipo de tareas T, que pasan a considerarse autoevidentes, a la vez que se excluye a otras posibles técnicas alternativas. Por ejemplo, en la escuela secundaria argentina, las raíces de una ecuación cuadrática en una variable se determinan casi exclusivamente usando la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, designada en la jerga institucional como “baskara” o “fórmula resolvente”.

$\theta$ : Tecnología, se refiere a un *discurso racional* o *logos,* sobre la técnica $\tau$, orientado a justificar que ésta es eficaz para realizar las tareas del tipo *T*. Cada institución establece sus propias maneras de justificar. La tecnología

tiene por objeto *explicar* y *aclarar* la técnica, estableciendo por qué ella es correcta o más potente y de mayor alcance que otra. Entonces, la tecnología tiene o debería tener, la función de producir técnicas nuevas, ya sea por el cuestionamiento de las existentes, como por mostrar su inadecuación a variaciones de la tarea.

Θ: El discurso tecnológico realiza afirmaciones sobre las que se puede pedir una justificación, que demanda un nivel superior, como el de la teoría, de igual modo que las tecnologías justifican las técnicas.

Cualquiera sea la actividad que se modele con una praxeología, ella se produce y existe en relación a una institución, sea o no educativa. Las personas emocionan, sienten, perciben, piensan, toman decisiones y actúan en multiplicidad de situaciones, pero las praxeologías no se refieren a la dimensión personal. Las praxeologías retienen solo la actividad material, externa y prototípica de todos los usos posibles de un objeto, en una posición institucional.

La noción de praxeología, es clave en el desentendimiento de la dimensión personal en didáctica, que impulsa la TAD. También lo es, para evitar el plano cognitivo individual, al que se vincula con la psicología y para supuestamente, eludir el recurso a elementos inmateriales, como mente y representación mental, ambas nociones teóricas de la psicología, consideradas del orden del espíritu.

Sin embargo, teorías psicológicas pragmáticas de la conceptualización de lo real, como la TCC, ponen en evidencia el origen emocional (corporal) de la percepción, del conocimiento y del pensamiento. La expresión de Vergnaud, “el pensamiento es un gesto” revela hasta qué punto asume un origen corporal, emocional y material, de los conceptos, incluidos los científicos. Todos surgen de la actividad prolongada de un sujeto en situación, tanto para

un chofer de taxi, un profesor de matemáticas o para Einstein. Esta epistemología pragmática de la conceptualización, permite abordar tanto la dimensión social como la individual, a la vez que genera instrumentos teóricos importantes para tratar el origen individual y cultural de los conceptos y de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de cualquier campo conceptual.

En nuestra opinión, no se trata de teorías antagónicas, sino complementarias. Cada ciencia define y recorta su objeto de estudio como mejor le parece. En nuestros trabajos, intentamos guardar una contabilidad estricta entre la dimensión didáctica y la dimensión psicológica. Así, reservamos para la primera el estudio de los procesos formativos de las personas, lo cual es al menos parcialmente compartido con la didáctica. Por su parte, esta última estudia los procesos de formación de las culturas, lo cual no puede escindirse absolutamente de los individuos que participan de esas culturas.

Pero por más "sujeta" que una persona esté a las diversas instituciones sociales en las que participa, por ejemplo, en la ciencia, hay momentos históricos en los cuales, son ciertos individuos excepcionales y sus creaciones subversivas y extemporáneas, en contra y a pesar de la cultura que integran, las que motorizan la generación de conocimiento. De manera a veces muy lenta y con muchos obstáculos y resistencias dicho conocimiento demora en abrirse paso, para volverse un saber legitimado institucionalmente.

Es el caso bien conocido de Galileo- Galilei quien, para salvarse de las garras de la inquisición, debió negar sus ideas sobre el movimiento terrestre, que dejaban en claro que la tierra no era el centro del universo. También podemos mencionar a Newton, quien, adoptando una idea totalmente ajena al mecanicismo dominante en su época, como la *acción a distancia*, formuló sus Principia y la ley de

gravitación, y produjo una teoría explicativa que unificaba la *física del cielo y de la tierra*, destronando definitivamente la cosmología del Filósofo (Aristóteles) que, por 20 siglos, había dominado las explicaciones del movimiento de los *graves* y de los cuerpos celestes y validando la llamada revolución copernicana.

Estos hombres, y sus contribuciones a la ciencia, muestran que la "verdad" es efímera, y la certeza, imposible, excepto en los sistemas axiomáticos. Ellos fueron únicos, y geniales, el mundo no tuvo cinco Aristóteles, cuatro Arquímedes, cinco Galileos, o diez Newton, y otros tantos Descartes o Spinoza. Es difícil explicar ciertas creaciones humanas absolutamente singulares, sólo con la dimensión social.

Un caso muy evidente sobre el surgimiento de ideas que implican rupturas radicales con los conocimientos de una cierta época, es el de Einstein, quien como ya hemos dicho, intentó difundir en 1905, frente a la incredulidad de sus pares, la idea de que ni el espacio, ni el tiempo eran absolutos, como se había tenido por cierto desde Newton. De hecho, recibió el premio Nobel por su publicación también de 1905, sobre el efecto fotoeléctrico, y no por la Teoría especial de la relatividad, que fue poco comprendida durante bastante tiempo, incluso por los especialistas de la Royal Society of London, cuando la presentó.

La noción de praxeología es muy útil y general, porque permite fulminar las críticas que malinterpretaron la noción de saber sabio, y establece que el saber de referencia, designa tanto a las prácticas sociales como al discurso más o menos articulado sobre ellas. Sin embargo, no resuelve todos los problemas, aún en el ámbito de lo didáctico. Volveremos sobre este punto en los capítulos siguientes.

La consecuencia que extraemos para la formación de profesores, es que las matemáticas y las ciencias son un producto de la cultura humana, que se produce por medio de actividades propias y características de las matemáticas o de la ciencia en cuestión. Enseñar matemáticas supone poner en acto ciertas formas institucionales de hacer, que son específicamente matemáticas, si este es el caso. Dichas formas resultarán transformadas, inevitablemente, al migrar de una institución a otra, produciendo praxeologías diferentes. Se asuma o no un compromiso con la TAD, el saber no se adquiere mediante la narración, ni por un simple mecanismo de traspaso que lo deja incólume. La enseñanza consiste en proponer situaciones y tareas en las cuales ese saber surja, involucrado en un conjunto de prácticas sociales.

Además, la noción de praxeología permite plantear el problema de la formación docente (Chevallard, 2001b) en términos del equipamiento praxeológico que se requiere para enseñar matemáticas, física, biología etc.

## Los fenómenos didácticos

Decir que la Didáctica es una ciencia, implica que posee un objeto de investigación propio, definido y circunscripto por ella, además de una manera de producir conocimiento, validada por una cierta comunidad de referencia. Del mismo modo que en el conjunto de las ciencias, se asume la existencia de hechos y fenómenos que pertenecen al dominio de lo matemático, lo físico, lo biológico, lo ecológico, lo histórico, etc. Entonces, la Didáctica es la ciencia de *"lo didáctico"* o de los hechos y fenómenos didácticos, y a ella le corresponde definir y redefinir este objeto (Chevallard, 2009).

A partir de la noción de praxeología, el objeto de la Didáctica se reformulará como: el estudio de las

condiciones y restricciones de la difusión de las praxeologías en las instituciones sociales. Una condición puede convertirse en una restricción para una persona o para una institución, cuando no puede ser modificada por éstas. Por ejemplo, la forma en que la escuela ejerce la función de organizar el tiempo, es una restricción para un profesor, que no puede modificar eso.

La TAD asume que "lo didáctico" es una dimensión característica de las sociedades humanas. Esta dimensión se presenta en cualquier situación donde una persona o una institución manifiestan la intención de hacer algo para ayudar a otra persona o institución a aprender alguna cosa (Chevallard, 2011). En toda situación didáctica, se genera un sistema didáctico de la forma $S(X; Y, \heartsuit)$, donde $X$ es la instancia (persona o institución) que estudia, $Y$ es la instancia de ayudas al estudio, y ♡ es aquello que está en juego en ese estudio (Chevallard, 2009).

Los sistemas didácticos característicos del paradigma de enseñanza de la visita a las obras, son de la forma $S(X; Y;$O), mientras los que se generan en el paradigma del cuestionamiento del mundo, adoptan la forma $S(X; Y; Q)$. En el primer tipo de sistemas, se estudian elementos de una praxeología "dada" O, por ejemplo, una cierta organización matemática propuesta en un diseño curricular. Aquí se estudia al objeto O, sin ningún cuestionamiento, con la ayuda exclusiva de un profesor. En el segundo caso, el estudio se desarrolla alrededor de otro tipo de obra, que es una pregunta $Q$, para la cual se construye una respuesta, relativa y provisoria, con todas las acciones, las dialécticas, la observación, análisis, evaluación y desarrollo de recursos que eso implica.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2007, 2009 a, b; 2012a) ha identificado y descripto entre otros, los fenómenos didácticos: *visitar las obras* o *monumentalización del saber matemático*, y su

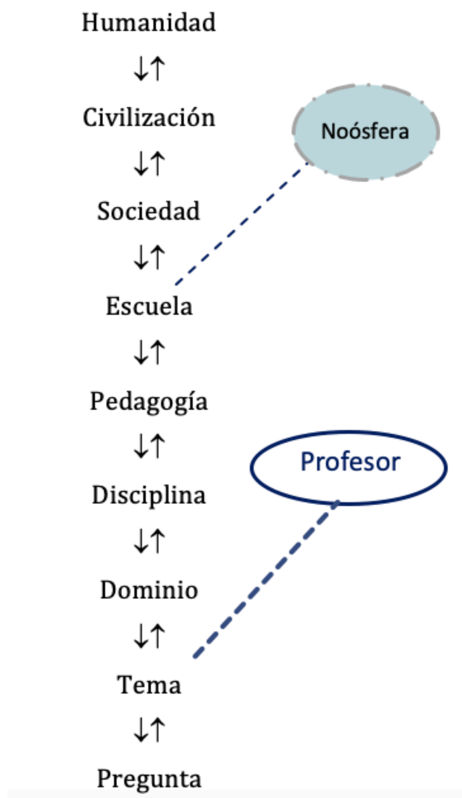
consecuencia directa: la *pérdida de sentido* de la matemática escolar (Chevallard 2001). El análisis del funcionamiento de los sistemas didácticos desde una perspectiva antropológica o cultural, evidencia que los actos o gestos didácticos que ocurren en su seno, no dependen sólo de los componentes del sistema. Al contrario, dichos gestos están determinados por diversas condiciones, que el análisis didáctico debe identificar. Para estudiar esas condiciones, la TAD genera una herramienta denominada *Escala de los niveles de codeterminación didáctica* (Chevallard, 2001, 2013a), que tratamos en la próxima sección.

## Niveles de codeterminación didáctica

El análisis didáctico, no puede reducirse a las características de lo que será enseñado ni a la disciplina a la que pertenece. La condición antropológica, requiere involucrar en el análisis didáctico, a otros niveles que se presentan en la figura siguiente (Chevallard & Sensevi, 2014).

Cada nivel de la escala establece condiciones que podrían afectar la vida de los sistemas didácticos. Las flechas dobles, significan que las condiciones en un cierto nivel, pueden afectar a los otros bidireccionalmente (Chevallard, 2001, 2013a).

En el nivel más alto de la escala de codeterminación didáctica se encuentra a la *Humanidad*, una condición que todos los animales humanos compartimos. Es importante remarcar que la conservación y el desarrollo de la vida de la especie humana, se basan en la cooperación y en la difusión y transformación de obras como el lenguaje, la sexualidad, la organización matriarcal o patriarcal, la búsqueda y producción de alimentos, etc. Esta conservación trasciende largamente el nivel biológico y se ubica en el plano social y en la enseñanza de unos a otros.




El nivel de la *Civilización* se refiere a las sociedades que tienen en común costumbres, saberes, artes, y un cierto nivel de progreso material, social, cultural y político.[5] Las diversas sociedades que integran una civilización, comparten y difunden instituciones e ideas como la democracia, la república, la igualdad ante la ley, la educación obligatoria, pública y laica, el estado de bienestar, el rechazo a la discriminación de cualquier

---

[5] Véase el Diccionario de la Real Academia Española, https://dle.rae.es/civilizacion

índole. No será la misma la enseñanza en una civilización democrática, que en una autoritaria.

El nivel de la *Escuela* designa a todos los tipos y a todos los niveles de escuela: primaria, secundaria en sus diversas orientaciones y modalidades, la educación de adultos, la formación terciaria universitaria o no.

El nivel de la *pedagogía*, es descripto por la TAD de manera metafórica, como el sistema de condiciones a través del cual el estudiante es conducido hacia aquello que debe estudiar.

Una *disciplina* $\mathcal{D}$ es un sistema de praxeologías $\wp_{\mathcal{O}}$ que involucra un campo de objetos $\mathcal{O}$. Dicho sistema está alojado en una cierta institución, en la cual se encuentra relativamente "bien definido", "bien -construido "y "bien controlado" (Chevallard, 2020). Las disciplinas incluyen tanto a aquellas llamadas académicas, así como las asignaturas propias del curriculum de la primaria y la secundaria: aritmética, matemáticas, física y química, educación física, biología, inglés, español, francés, historia y geografía, filosofía, etc.

Esta definición de $\mathcal{D}$ permite incluir entre las disciplinas a sistemas praxeológicos propios de instituciones que no son estrictamente escolares. En general, en las disciplinas científicas, se asume que, ellas se encuentran inacabadas y que carecen de "todas" las respuestas, siendo esta una diferencia notable con lo que se llama pseudociencia. La TAD rechaza la concepción *purista* de las disciplinas, que consiste en monopolizar los objetos de estudio y considerarlos como propiedad exclusiva de una disciplina dada y excluyente de otras. Contrariamente, se asume que las disciplinas están siempre en proceso, son inacabadas por naturaleza y, por lo tanto, los objetos y las praxeologías ligados a ellas, cambian con el tiempo (Chevallard, 2020).

Actualmente, este cambio es evidente y natural, aunque no siempre fue así. En los comienzos del siglo XX, la Teoría de la Relatividad revoluciona la Física, así como en el siglo XIX la revolución Darwiniana lo hace en Biología, provocando la caída de teorías que se consideraban absolutamente verdaderas. Como afirmaba el epistemólogo argentino Eduardo Flichman, al inicio de la edad moderna, el optimismo y la soberbia eran enormes, la revolución iniciada con Copérnico que se formaliza con Newton, pasando por Kepler y Galileo, es tan impresionante, tan impactante, y obtiene resultados tan increíbles, que, los científicos de fines del siglo XVII y hasta fines del siglo XIX; consideraron que estaban "completando" las teorías; como si estuvieran poniendo la frutilla del postre. Sin embargo, tales teorías cayeron, y esto permite comprender que la ciencia no produce certezas, sino tan solo conjeturas.

Luego del nivel de las disciplinas, la escala propone el nivel de las *Áreas*, por ejemplo, si la disciplina es Física, puede hablarse de áreas como el electromagnetismo, o la física de partículas, etc. Y dentro del Electromagnetismo, de *Sectores* como electrodinámica u electrostática, e incluidos en ellos, tendremos *Temas*, pongamos por caso a la Ley de Coulomb para la interacción electrostática.

Los temas remiten a preguntas diversas ¿por qué se eriza nuestro cabello al peinarlo? ¿por qué es necesaria una conexión a tierra en una instalación eléctrica? ¿por qué decimos coloquialmente que *cayó un rayo*?

La Escala de los niveles de codeterminación didáctica, remarca que, en una cierta institución las praxeologías viven bajo el efecto de condiciones ecológicas, es decir, condiciones que afectan su supervivencia o viabilidad.

Las praxeologías se adaptan y transforman en el sentido permitido por las condiciones de los distintos niveles, incluso de aquellos muy alejados de la institución escuela,

y del aula. La escala permite tratar cuestiones del tipo: ¿cómo es la organización matemática (OM) o la organización física (OF)? ¿cómo se estructuran las preguntas matemáticas o físicas a estudiar? ¿Cómo se organiza su estudio, esto es la OD, en una cierta institución?

Existe una ecología praxeológica, es decir que no todas las praxeologías sobreviven, o se adaptan, algunas mueren. Para explicar por qué una cierta praxeología se difunde o no se difunde en una cierta institución, es necesario rastrear los orígenes de los conocimientos, matemáticos o físicos, o biológicos, etc. (en los niveles inferiores de la escala, como el sector o el área) y en los niveles superiores (pedagogía, escuela, sociedad, civilización, humanidad).

La condición antropológica, según se evidencia en la escala, extiende el ámbito de la Didáctica a cualquier institución social donde se producen procesos de difusión de obras de cualquier tipo.

Una pregunta Q es una obra útil, que la humanidad crea para suscitar o resucitar algo. La TAD ha creado un método para estudiar una pregunta dentro del paradigma emergente del cuestionamiento del mundo. Dicho método, involucra varios constructos tales como: el denominado modelo Herbartiano, que está asociado directamente a la noción de Recorridos de Estudio e Investigación (REI) (Chevallard, 2001, 2009a) y a la noción de Modelo Praxeológico de Referencia.

Con relación a la formación de Profesores la escala de codeterminación muestra que lo que un docente realiza en el aula, está largamente afectado y acotado por los niveles superiores de la escala y por la noósfera. Reconocerlo es importante para evitar responsabilizar a los enseñantes por los fracasos del sistema escolar, sin advertir las restricciones bajo las cuales actúan, tal como ha sido puesto de manifiesto mediante el fenómeno del encierro

temático y de la pérdida de sentido de la matemática escolar (Chevallard, 2001, Gascón, 2003, 2004). La didáctica tiene que aportar a los profesores, las herramientas didácticas y praxeológicas para el ejercicio de su profesión.

## Teorías didácticas pragmáticas

Suele decirse que la TAD es una teoría que adopta una epistemología pragmática[6] (Chevallard & Sensevi, 2014). También la Teoría de los campos conceptuales se basa en un principio de elaboración pragmática de los conocimientos (Vergnaud, 1990).

El pragmatismo es un movimiento filosófico y educativo que surgió en los Estados Unidos en la década de 1880, de la mano de Charles Peirce y de William James. No solo alcanza a la filosofía, sino también a la educación, la psicología, la sociología, el derecho y la ciencia política. El pragmatismo intenta recuperar la razón de ser y los valores humanos para dominar una acción.

Para Charles Peirce (1839-1914), el pragmatismo era un método para aclarar ideas y conceptos, para despejar la mente de confusiones metafísicas o de cualquier otra índole. Peirce definió el término pragmatismo como "dar claridad a nuestras ideas", al considerar todos sus posibles efectos y aplicaciones prácticas. La concepción que alguien posee de esos efectos es la consideración integral de ese objeto o idea. Peirce rechazó cualquier enfoque abstracto de la verdad o asumido a priori, adelantándose al criterio empirista del significado del positivismo lógico.

---

[6] Las palabras: pragmática, pragmático, vienen del latín pragmatĭcus, y este del griego, pragmatikós. En tanto que adjetivo, pragmático es sinónimo de práctico, materialista, funcional, utilitario, cómodo, y lo contrario de teórico. Como sustantivo, Pragmática es una rama de la Semiótica, que estudia el significado de los enunciados lingüísticos en su relación con los hablantes e intérpretes.

El pragmatismo encarna el predominio de la actitud empirista y el abandono del racionalismo e idealismo, así como el combate hacia todo tipo de dogmatismo, trascendentalismo, artificialidad y pretensión de finalidad en la verdad.

El pragmatista William James se enfrentó explícitamente al concepto de verdad, sometiéndolo a una crítica implacable; y trató de superar la noción de correspondencia entre nuestras ideas y la realidad, pues existen innumerables tipos de realidad. Así, la práctica, se convierte en juez y árbitro absoluto, es lo único que decide la validez e invalidez de cualquier formulación teórica o científica. William James representa, junto con Royce, una reacción global contra el absolutismo monista y trascendente, una crítica fundamental contra todo tipo de dogmatismo y racionalismo.

Para John Dewey, el pragmatismo como método de investigación atiende "los problemas reales que surgen de los asuntos efectivos" (Dewey, 1920, p. 94). La experiencia común proporciona una función de control con la que contrastar los resultados de la investigación filosófica. En este sentido, el pragmatismo aparece como una verdadera cruzada contra el racionalismo y el idealismo en tanto método de investigación científica. Peirce y James fundaron el pragmatismo clásico, luego, Dewey y Mead, pasaron a primer plano los aspectos sociales y políticos del pragmatismo. Para ambos, el ideal de democracia constituye una forma de vida comunal en la que "todos comparten y todos contribuyen" siendo esta cuestión de vital importancia para la teoría y la filosofía política contemporánea.

En la actualidad, el pragmatismo ha derivado hacia una corriente compleja y heterodoxa, cuya raíz inicial pudo ser una reforma profunda del modo de conocimiento y de la

acción humana; pero que ha evolucionado hacia derroteros totalmente distintos.

Cuando se mira la actividad en situación de un estudiante, de un profesor, del trabajo profesional, se advierte que las metas, las informaciones que se considerarán pertinentes, las decisiones y anticipaciones, se basan en las consecuencias de la acción, mucho antes de que esta pueda ser puesta en palabras. De allí que, como didactas, y como *animales didácticos*, no se puede sino ser pragmatista, aún sin saberlo (Sensevy, 2007).

Vergnaud repite incesantemente que el pensamiento es un gesto *«la pensée est un geste»*. Esta expresión, nos previene de la tentación mentalista: un pensamiento sin cuerpo, y de su opuesta, la tentación fisicalista y materialista, de un cuerpo sin pensamiento. Vergnaud, se aparta de la noción cartesiana de percepción, y nos enseña que la percepción no es neutra, ni intermediaria entre el mundo real y el mental, sino que, la percepción está atravesada por nuestros esquemas y conceptos. Los esquemas son el producto del cuerpo en situación, o, dicho de otra forma, el gesto es un pensamiento.

La epistemología pragmática es importante, para situar a la TAD y a la TCC en lo que Gascón (1998) denomina el programa epistemológico en didáctica de las matemáticas.

La epistemología pragmática, tiene consecuencias fuertes sobre la manera de entender el significado de las expresiones lingüísticas. Según las teorías pragmáticas del significado, los significados no son absolutos, sino diversos, y dependientes, o relativos al contexto en el que se usan. Puesto que es imposible establecer empírica y objetivamente el significado de un término, como evidencia la tesis de infra determinación de Quine, solo es posible examinar los diversos usos, que determinan el significado, relativo, de los objetos.

Esta es la postura del segundo Wittgenstein (1976) en las Investigaciones filosóficas, allí él admite que, el significado de una palabra, depende de su función en un juego de lenguaje, donde posee un modo de uso y un fin concreto para el cual se ha usado.

En una concepción pragmática del significado, los objetos matemáticos o de otro tipo, son el producto del sistema de usos, o de prácticas culturales propias de la pragmática humana o de una cierta cultura, y cambian permanentemente. En la TAD, este cambio se interpreta en función de las necesidades, de las instituciones, y de las posiciones que un cierto sujeto institucional ocupa.

La noción de relación personal e institucional al objeto propuesta por la TAD, así como la noción de praxeología, que responde en qué consisten dichas relaciones y cómo los objetos de saber emergen del sistema de prácticas institucionales vinculadas con ellos, son compatibles de manera general, con una epistemología pragmática.

Las teorías didácticas pragmáticas como la TAD y la TCC tienen mucho que contribuir en la formación de los profesores. Sobre todo, si se busca superar a la enseñanza tradicional en dicha formación, lo cual hasta ahora no ha podido lograrse, ya que los profesores enseñan como fueron enseñados, tanto en su formación inicial, como en todo su paso por el sistema educativo, esto es, a grandes rasgos, asumiendo la pedagogía tradicional.

# Capítulo 2

# ENSEÑAR Y CUESTIONAR AL MUNDO EN El SISTEMA EDUCATIVO ESCOLAR

# Las instituciones escolares

Los sistemas educativos nacionales surgieron en el siglo XIX, la escuela, es una de las instituciones producidas por lo que se ha dado en llamar la modernidad. Durante ese siglo se intentó concretar las ideas de liberación del hombre de cualquier esclavitud, nacidas ya en el siglo XVIII con el iluminismo y el racionalismo.

El Siglo de las Luces o Ilustración, involucra las tendencias filosóficas y literarias originadas en Europa y en toda América durante el siglo XVIII, antes de la Revolución Francesa de 1789. Los protagonistas de este período, buscaban abandonar la oscuridad de las centurias previas, iluminados por la razón, la ciencia y el respeto a la humanidad. El iluminismo se opuso a la irracionalidad, la superstición, el fanatismo, la censura y exigió libertad de pensamiento, además del reemplazo del orden feudal por otro nuevo, más razonable y natural.

El impacto de la obra de Newton (1643-1727), como ya mencionamos, fue de tal magnitud, que la mecánica newtoniana se convirtió en paradigma de toda investigación científica. En el siglo XVIII surgieron numerosas ramas de la matemática para aplicar dicha teoría a situaciones cada vez más sofisticadas. La concepción corpuscular de la materia originaría la teoría atómica de Dalton y Avogadro. Los fenómenos luminosos y eléctricos se trataron de explicar según el patrón newtoniano y los gases, se concibieron como un conglomerado de partículas, gobernado por las leyes de Newton (Boido, Flichman & Yagüe, 1988).

En los siglos XVII y XVIII, los filósofos se enfocaron en el problema del conocimiento discutiendo y cuestionando el origen y la validez de la nueva ciencia. Las ideas religiosas perdieron legitimidad: el infierno y el cielo ya no podían

ocupar el lugar que les había asignado el Dante. El hombre dejó de ser el “rey de la creación” que habitaba en un universo cerrado, bajo la protección divina. La revolución copernicana trajo consigo una nueva concepción de la ciencia y de sus métodos, además de una cosmovisión que cambió el modo de concebir a la naturaleza y sus relaciones con el hombre y con Dios.

El cuestionamiento del supuesto origen divino de la monarquía, conducirá a reemplazarla por una organización política basada en la razón. El iluminismo europeo se apoyó en una generación de pensadores como Locke (1632-1704) que desarrolló la idea de contrato social, ya trabajada por Hobbes. Para Locke, las relaciones sociales eran naturales y anteriores al contrato social. El poder para gobernar y los límites a esa potestad provenían de la voluntad de hombres libres. Cada individuo cedía parte de su poder a un gobierno creado para garantizar la vida y la convivencia en sociedad. La libertad y la propiedad, derechos naturales de las personas, no podían ser avasallados por dicho gobierno y en tal caso, los gobernados tenían el derecho a sublevarse y reemplazarlo por otro.

Montesquieu (1689-1755) elaboró la teoría de la separación de poderes. Creía que el sistema inglés con sus tres poderes divididos, Ejecutivo, Legislativo y Judicial, era el sistema apropiado para limitar y controlar el poder real, asegurando mayor libertad y seguridad para el Estado.

Voltaire (1694-1778) criticó la religión tradicional y fundamentó la necesidad de la tolerancia religiosa. Al igual que Montesquieu, ponderaba el sistema político inglés, pero su ideal de gobierno habría sido el despotismo ilustrado. Defendió los intereses de los burgueses y desconfió de la ignorancia de los sectores populares. Criticó las guerras, la intolerancia, la censura, la

burocracia, la corrupción, el oscurantismo, el uso de la tortura y el fanatismo religioso.

Diderot (1713-1784) elaboró junto a d' Alembert los veintiocho tomos de la Enciclopedia, obra basada en la confianza en la ciencia, el progreso, la secularización del saber y la búsqueda de cambios. Su contenido cuestionaba a las autoridades políticas y religiosas de la época, motivo por el cual, fue considerada peligrosa y enfrentó innumerables prohibiciones. Entre sus más destacados colaboradores se encontraban: el biólogo George Buffon, el economista Anne Turgot y los filósofos ilustrados Voltaire, Condillac y Rousseau.

Rousseau (1712-1778) en el "Contrato social" (1762) buscó armonizar la libertad individual con la autoridad gubernamental, proponiendo una forma nueva de legitimar el gobierno. Por medio de este contrato cada ciudadano entrega sus derechos al gobierno, a cambio de garantías sobre su vida y propiedad, así se crea una voluntad general en la búsqueda del bien común, una síntesis de lo que es mejor para todos. El principio de la soberanía popular establece que los gobernantes solo son funcionarios del pueblo, que es el depositario del poder. Su obra "Emilio" o "De la educación" (1762) es una novela pedagógica, cuya parte religiosa le valió la condena inmediata por parte de las autoridades parisinas.

En lo vinculado a la economía Quesnay (1694-1774), creador de la fisiocracia, sostenía que la riqueza provenía de la tierra y rechazaba la teoría mercantilista que ponía el acento en el dinero como elemento primordial de la economía. Creía en el libre juego de la oferta y la demanda, descreyendo de la participación del Estado.

Con este bagaje de ideas desarrollado por el iluminismo dieciochesco, desde el comienzo del siglo XIX, se busca construir una sociedad justa y libre, sobre la base del poder de la ciencia y de la razón. La física, la biología y la

historia se vuelven ciencias paradigmáticas a partir del surgimiento del positivismo primero y del positivismo lógico y la escuela de Viena hacia comienzos del siglo XX.

La democracia emerge como la forma política que permitirá alcanzar el ideal de igualdad a todo nivel. Igualdad ante la ley, igualdad de oportunidades, igualdad para decidir sobre el propio destino, igualdad de los ciudadanos sin distinción de origen, raza o credo. Además de garantizar la libertad política y social, es preciso liberar al pueblo de la opresión de la tiranía de los monarcas absolutos.

Los hombres del siglo XIX, herederos del iluminismo y del racionalismo, confían en la ciencia experimental y en el positivismo para organizar el contrato social de manera racional. Surgen así las constituciones nacionales, o conjuntos de leyes fundamentales que establecen las garantías, las libertades, los derechos y las obligaciones de la vida política y social de la Nación.

Para que el pueblo conozca estas constituciones nacionales, deberá garantizarse el acceso universal de todos los ciudadanos a la lectura y la escritura. Los estados nacionales modernos necesitan, además, lograr la unidad nacional y desarrollar sentimientos de adhesión a la cultura nacional, superando diferencias raciales, lingüísticas, religiosas, geográficas y culturales. El pueblo, tiene que asumir universalmente sus derechos y deberes, ejercer la soberanía y resistir cualquier intento de opresión o retorno al vasallaje.

Para lograr estos fines, en la segunda mitad del siglo XIX los herederos de la ilustración y del iluminismo crearon la escuela universal, obligatoria, gratuita, común y laica, cuyo cometido era producir la unidad nacional. La escolaridad obligatoria se vuelve el centro de la política educativa de todos los estados nacionales modernos, que dirigen, supervisan y financian al sistema educativo escolar.

*"En el fondo de los mejores espíritus de los siglos XVIII y XIX, que proclamaron la necesidad de la instrucción universal para lograr la dignidad de los pueblos y el ejercicio de sus derechos, latía una convocatoria a una nueva vida política, a una salvación en este mundo, a una redención universal. La escuela era la llamada a realizar la gran obra y los maestros sería los apóstoles laicos de la gran cruzada." (Zanotti, 1972).*

## La escuela tradicional y la cultura letrada

En una sociedad alfabetizada, requiere dominar las formas del lenguaje oral y escrita. Ambas sirven para comunicarse y poseen una gramática subyacente común, pero su enseñanza, aprendizaje y dominio ocurren en instituciones y situaciones diferentes.

La oralidad se adquiere y se desarrolla en la convivencia con una determinada comunidad lingüística, su fugacidad permite modificar el mensaje de manera inmediata y es susceptible de interrupciones. La interacción con el interlocutor es continua, se retroalimenta permanentemente a partir de entonaciones, tonos, pausas, cambios de ritmo y gestos, ademanes y movimientos. Puede ser más espontánea e innovadora que el lenguaje escrito, a partir del uso de neologismos y expresiones coloquiales. La situación de uso determina el acto lingüístico, pues mayoritariamente el significado está fuera del texto.

La lengua escrita en su versión alfabética, tiene alrededor de 3500 años. Leer y escribir requieren de una enseñanza especial y dilatada en el tiempo, pues no es posible escribir "naturalmente", el lenguaje escrito es artificial y posee reglas de uso definibles que han sido ideadas conscientemente. La escritura es menos utilizada que la lengua oral y es más estable, porque se conserva a través del tiempo y del espacio, no permite una corrección inmediata ni supone una relación directa con el receptor, ni se puede complementar mediante códigos

extralingüísticos. Es planeada y organizada previamente considerando qué se va a decir, cómo, con qué fin y a quien. La lengua escrita es un proceso semiótico complejo que requiere invención, redacción de borradores, evaluación, revisión y edición, así como una esmerada organización gramatical.

Durante muchos siglos, aun existiendo la escritura, la mayor parte de la transmisión de la cultura era oral. Solo las minorías letradas dominaban la escritura. La invención de la imprenta en el siglo XVI, produjo una revolución cultural que amplió la difusión de la escritura a sectores más vastos. Sin embargo, recién en el siglo XIX con el surgimiento de los estados modernos y de la escuela, se inicia un proceso de masificación de la cultura letrada.

El ámbito familiar y social inmediatos, encargados de la transmisión de la cultura vital, por medio de la oralidad, se verán así opacados por la escuela, que deviene indispensable para enseñar a leer, escribir y para trasmitir la herencia cultural de la humanidad, debiendo garantizar el acceso universal a estos bienes.

En la escuela tradicional, el docente es el encargado de tamaña tarea. Para eso, está a cargo de una clase, donde las actividades giran en torno a él. En algunas instituciones, aún existen artefactos como las tarimas, desde donde el maestro elevado sobre ellas, exponía magistralmente el saber a los alumnos, sentados en pesados bancos atornillados al suelo. La transmisión se realizaba de manera secuencial y lógicamente organizada a través de lecciones que los estudiantes debían seguir con atención y disciplina, así como realizar los ejercicios que les eran indicados (Saviani, 1984).

## La escuela nueva

Hacia fines del siglo XIX, pasados aproximadamente sesenta años de la instalación de los sistemas educativos nacionales, la escuela, creada para alfabetizar e instruir universalmente al pueblo, no producía los resultados esperados. No todos tenían acceso a ella, o fracasaban y los ciudadanos escolarizados no respondían al ideal social pretendido. Este tipo de escuela, fuertemente enciclopedista y libresca y desconectada de la vida, donde predominaban las clases magistrales, será llamada tradicional. Su alejamiento de la teleología original se atribuirá a la enseñanza positivista y enciclopedista, convocando a un cambio que permita lograr el ideal trazado por la modernidad.

La filosofía de la educación desarrollada por John Dewey en Estados Unidos, lo convertirá en el padre de la educación progresista y del movimiento denominado escuela nueva. Las clases magistrales, donde se narra el saber, no educan, ni sirven para enseñar, porque nadie puede reflexionar por otro *"ningún pensamiento, ninguna idea, pueden ser transmitidos como idea de una persona a otra"* (Dewey, 1916). Es la experiencia y la reflexión sobre ella, lo que genera el pensamiento.

Para Dewey, la actividad continua del alumno basada en su interés, es la proveedora de una rica experiencia, siempre que se trate de una situación donde se desarrolle un problema genuino, que convoque a la reflexión. El alumno, tendrá la información necesaria y realizará las observaciones pertinentes para desarrollar ese problema, y luego por sí mismo, comprobar y determinar la validez de sus ideas. Reflexionar sobre la experiencia, es la única forma de aprender, nadie aprende *siendo narrado*.

Si bien la obra de Dewey y sus críticas a la pedagogía tradicional fueron muy discutidas en el período entre guerras, la educación progresista y libertaria que proponía,

nunca se llevó a la práctica, o se implementó de manera muy desvirtuada, lo cual le valió críticas injustas. El fracaso de la escuela enciclopedista y libresca, basada en la narrativa del conocimiento en lugar de la experiencia vital, se atribuía a su alejamiento de la vida real, del mundo del trabajo y social como factores educativos.

La escuela nueva y la escuela activa propusieron ingresar la vida a la escuela, no alcanza con aprender de los libros: hay que hacer. La escuela nueva quita del centro de la escena al docente y pone allí al alumno, resaltando la importancia de "aprender a aprender". En consecuencia, desde el punto de vista organizacional, los alumnos deberían agruparse según sus áreas de interés. El profesor sería un motivador y orientador de las iniciativas de los alumnos y trabajaría con grupos reducidos, en un ambiente estimulante y dotado de gran variedad y riqueza de recursos.

Este ideario no impactó en la organización de las instituciones escolares, quizás por su elevado costo económico con respecto al de la escuela tradicional. En los hechos, se produjo una psicologización de la enseñanza y el saber siguió ausente de la ecuación didáctica, el aprender a aprender no ocurre en un vacío de conocimiento. En la pedagogía tradicional el saber es fijo e incuestionable, en la puesta en escena de escuela nueva, resultó olvidado, reducido, al servicio de la universalización exigida a la escuela salvadora o "redentora de la humanidad" de la que habla Zanotti (1972) en la cita que transcribimos.

La escuela nueva, conservó la teleología fijada a la escuela tradicional, sin advertir ni analizar que se alejaba más de su cumplimiento.

> *"provocando el aflojamiento de la disciplina y la despreocupación por la transmisión de conocimientos, acabó por rebajar el nivel de la enseñanza destinada a las capas populares las que,*

*muy frecuentemente, tienen en la escuela el único medio de acceso al conocimiento elaborado. Como contrapartida, la "Escuela Nueva" perfeccionó la calidad de la enseñanza destinada a las élites"* (Saviani, 1984)

Hacia 1950, arreciaban las críticas a la escuela nueva y a su supuestamente probada ineficacia, dando lugar a la denominada pedagogía tecnicista o también pedagogía por objetivos. Esta visión pedagógica tendría su origen en el movimiento utilitarista que surgió en EEUU, en paralelo con la aplicación de las ideas tayloristas a la política industrial, que intentaba aumentar la calidad y cantidad de la producción (Gimeno Sacristán, 1986). Si bien se propone como superadora del planteo tradicional, la pedagogía por objetivos forma un sujeto pasivo, poco creativo, obediente, acrítico, competitivo y eficiente, porque se busca generar hábitos y destrezas para que el alumno se inserte en la sociedad industrial.

La formulación de objetivos precisos, observables y mesurables, expresados en términos de conductas, está en el corazón de la pedagogía tecnicista. El maestro es aquí un técnico, que debe dominar las "técnicas eficaces" para alcanzar los objetivos. El profesor y el alumno son meros ejecutores de un proceso concebido, planeado, coordinado y controlado por especialistas. Es el auge de la teoría de Gagné y de la taxonomía de Bloom, esta última, ideada para establecer los objetivos de la evaluación. Sin embargo, aún se usaba la taxonomía en los años ochenta, no para evaluar, sino para planificar la enseñanza.

Esto generó consecuencias nefastas, que siguen vigentes hoy, sustituyendo el término objetivo por la palabra competencia. De igual manera, se sigue identificando a la enseñanza con la evaluación y a esta última, con la medición. Así se escuchará decir a funcionarios y a sufridos profesores, aberraciones tales como, que las pruebas internacionales estandarizadas

miden el logro de las competencias, que es importante decirlo, no es medible.

El tecnicismo educacional incrementó la burocratización escolar, afectando negativamente a los maestros y a la enseñanza. Una vez más, todo esto resultará en una mayor atomización y reducción del saber a enseñar y se producirá un aumento de la deserción escolar y la repitencia.

Trascurridos más de 180 años de la creación de los sistemas educativos nacionales, ni la pedagogía tradicional de origen, ni la de la escuela nueva, ni la tecnocrática, han logrado aproximarse a que la escuela cumpla con los fines trazados por la modernidad, esta sucesión de pedagogías alternativas solo cambia los instrumentos, pero el ideal moderno de educación universal, permanece.

Desde mediados del siglo XX, con el surgimiento de los medios de comunicación de masas (mass-media), se produce un regreso relativo a la difusión cultural oral, renovado por la cultura de la imagen (Otero, Moreira & Greca, 2002; Otero, 2004). Si bien la enseñanza escolar habitual no parece advertirlo, la escuela ya no es el centro del proceso educativo y la crisis de esta institución se agrava en todos los niveles.

A comienzos de este siglo, la masificación y difusión global de las tecnologías de la información y de la comunicación basadas en la red 2.0 y de los dispositivos computacionales, el auge de la robótica, la inteligencia artificial, el machine learning, el big data, la impresora 3D, su incidencia en el mundo laboral (World Economic Forum, 2016, 2017) y su impacto en la pérdida de empleos rutinarios (Benedikt Freya & Osborne, 2017), vuelven a presionar por cambios en el sistema educativo escolar, aunque justo es decirlo, la escuela es también una de las pocas instituciones creadas por la modernidad, que sobrevive.

## El paradigma de la visita a las obras

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ha identificado, caracterizado y sintetizado, un fenómeno didáctico propio de los sistemas de enseñanza actuales, al que metafóricamente denomina monumentalización de los saberes (Chevallard, 2007, 2012, 2013). Para explicar este fenómeno, se utiliza una analogía entre la comunicación del saber, sea o no matemático, y la visita a un museo.

En el paradigma de enseñanza actual, los estudiantes, son invitados a "visitar" las obras matemáticas o de otras ciencias, propuestas en el curriculum y los programas oficiales, como si se tratara de la visita a un museo. El guía del museo (profesor), conduce a los visitantes en un recorrido por las obras de arte y los monumentos, recorrido establecido por él de antemano. El guía, también decide qué visitar y por cuanto tiempo. Las obras expuestas en un museo, sólo se pueden mirar, admirar e incluso venerar, manteniéndose a una distancia prudente de ellas.

Aplicando la analogía a los sistemas de enseñanza, las matemáticas y las ciencias se estudian, desde la creación misma de los sistemas educativos nacionales, como si fuesen monumentos, obras que están allí solo para ser honradas y admiradas. Así, las obras se presentan como carentes de vida y de utilidad, y solo se les conocen usos extraños.

La *monumentalización del saber*, nace, vive y se desarrolla en el paradigma de enseñanza dominante, aún hoy, en las instituciones escolares, denominado *paradigma de visitar las obras*, *o de inventariar los saberes* (Chevallard, 2013). El nombre se debe a que, los diseños curriculares y los programas de estudio, solo son listas o inventarios de obras matemáticas y científicas. En general, se presentan poco articuladas entre sí, o son recortes irreconocibles de grandes obras de la matemática, de la física, de la biología,

de la historia, etc. Así se estudiará "la función cuadrática", el "teorema de Pitágoras", los "casos de factoreo", "la segunda ley de Newton", la "ley de Ohm", "los sistemas materiales", "la circunferencia", como obras relevantes "per se" o incluso como totalidades, cuando en realidad, son apenas trozos de grandes obras científicas.

Como ya se ha mencionado, la TAD considera a las obras matemáticas, físicas, biológicas, químicas, lingüísticas, etc. como un producto de la cultura humana, creadas para responder a preguntas y a necesidades sociales. Sin embargo, las cuestiones que les dieron origen, permanecen ocultas o fueron olvidadas, siendo esto, un catalizador para el monumentalismo: solo están allí y deben estudiarse, sin que se sepa por qué o para qué. De este modo se genera y retroalimenta un proceso sistemático y muy arraigado de supresión de preguntas, a tal punto que, en la escuela actual, la enseñanza de respuestas ha sustituido a la de preguntas, sin reconocer ninguna necesidad de remitir a su origen, a su utilidad, a su razón de ser (Chevallard, 2001).

Por ejemplo, en el ámbito de la física escolar, la cinemática clásica se reduce a un estudio escalar del movimiento en una dimensión y a funciones matemáticas asociadas con la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. No se estudia la noción de observador, de sistema de referencia, ni de adición de velocidades galileana (Otero et al., 2019). Luego, para explicar las causas del movimiento, se estudiarán las leyes de la dinámica clásica, también en una dimensión -como si en nuestro mundo los desplazamientos fueran unidimensionales- y de manera escindida de la cinemática.

La matemática y las ciencias se proponen como saberes acabados y carentes de sentido, en lugar de inacabados, incompletos y siempre cambiantes.

En el paradigma de enseñanza de visitar las obras, se promueve una epistemología ingenua que incluye al menos todos los pares de conceptos fuera de foco señalados por Postman y Weintgarner (1969). Además, se adopta una axiología basada en la belleza, o en la perfección, o en la estructura, o en la simplicidad, o en la complejidad, que convoca a admirar, exaltar e incluso a amar las obras en cuestión, por dichos atributos.

De este modo, se habilitan ciertas ideas del sentido común pedagógico y didáctico, que señalan la importancia y el supuesto “deber” de los profesores de “motivar” a los estudiantes. Es decir, se pretende que los profesores establezcan y controlen externamente, qué debería o no agradar e interesar a cada alumno. La permeabilidad del profesorado a estas aberraciones es tan fuerte, que muchos docentes se sienten responsables por el “desamor” de los estudiantes por las matemáticas y las ciencias, y por las consecuencias sociales y económicas de este desinterés.

El paradigma de la visita a las obras, abona una axiología que desconoce el valor y la utilidad formativa inherente de las matemáticas y las ciencias, más allá del ámbito de los interesados directos: matemáticos, científicos y tecnólogos. Esto se enraíza en una concepción especulativa de la ciencia, de origen helénico y fundada en la obra de Platón y Aristóteles, que negaban a la ciencia cualquier aplicación práctica.

La búsqueda del conocimiento era una prerrogativa de los ciudadanos, de los hombres libres, mientras que las técnicas, las artesanías, el trabajo manual, se consideraban actividades serviles, o de esclavos. De aquí también heredamos el divorcio letal entre teoría y práctica (Farrington, 1974), cuyas lamentables consecuencias didácticas persisten hasta nuestros días.

Estas ideas, afectaron profundamente el desarrollo de la ciencia antigua. Por ejemplo, la medicina, fue durante

mucho tiempo una actividad artesanal, que luego se dividió: entre los médicos que realizaban los diagnósticos y los que llevaban a cabo las tareas manuales, como las intervenciones quirúrgicas. Esta separación llegó hasta el renacimiento, donde, por un lado, el médico "clínico" era un egresado universitario, que diagnosticaba empleando los tratados de medicina hipocrática y por otro, el cirujano, era un artesano, que tanto entablillaba un hueso fracturado como extraía una muela. En el texto de Farrington (1974) leemos una cita del anatomista Andrea Vesalio, del siglo XV, describiendo una clase sobre disección de su época:

> *Cuando la realización de todas las operaciones manuales -escribe- fue confiada a los barberos, no sólo perdieron los doctores el verdadero conocimiento de las vísceras, sino que pronto desapareció la práctica de la disección, sin duda porque los doctores no emprendían operaciones, en tanto que aquéllos a quienes se encomendaban las tareas manuales eran demasiado ignorantes para leer las obras de los maestros de anatomía. Pero era además imposible que esos hombres preservaran para nosotros un difícil arte que habían aprendido sólo mecánicamente. Es igualmente inevitable el lastimoso desmembramiento del arte de curar introducido en nuestras escuelas por el deplorable procedimiento en boga, de que sea un hombre quien practica las disecciones y otro quien describe las partes. Este último se encarama en un púlpito cual si fuera un grajo y con un notable aire de desdén susurra informaciones sobre hechos que nunca conoció de primera mano, pero que aprendió de memoria en libros ajenos, o cuya descripción tiene ante su vista. El disector, ignorante en las cosas del idioma, es incapaz de explicar la disección a la clase y se limita a ilustrar la demostración que debe ajustarse a las instrucciones del médico, en tanto que el médico jamás pone manos a la obra, sino que, por el contrario, desdeñosamente esquiva el bulto, como vulgarmente se dice. De esta manera, todo se enseña mal; se malgastan los días en cuestiones absurdas, y en la confusión se enseña menos a la clase que lo que un carnicero en su establo podría enseñar a un doctor. (íbid, p.69-70)*

En los siglos XVI y XVII, surgió la ciencia moderna, experimental, que desplazó a la ciencia antigua o clásica,

gracias a Leonardo da Vinci, Simón Stevin, Nicoló Tartaglia, Galileo Galilei, Torricelli, Kepler y Newton. Sin embargo y simplificando, a cuatrocientos años de una forma de entender a la ciencia, relativamente similar a la actual, el desprecio por el trabajo manual, por las técnicas, y la desvalorización de la utilidad formativa inherente del saber, siguen presentes en la enseñanza escolar.

La TAD propone dos tipos de utilidad formativa del saber matemático: *Trascendente* e *Inherente* (Chevallard, 2017; Kim, 2015). La *utilidad formativa inherente* es intrínseca o *inmanente* del saber matemático. Contrariamente, en diversas instancias sociales, solo se reconoce al saber su utilidad formativa trascendente. Así, se afirmará la importancia de las matemáticas y su estudio en el desarrollo del pensamiento lógico, o en la mejora de la atención voluntaria, o más triste aún, se valorizará la inteligencia de un estudiante según su performance en matemáticas o en ciencias versus la música, el arte o la educación física.

En síntesis, después de doscientos años de vida de los sistemas educativos nacionales y del paso por diversas concepciones pedagógicas, la vigencia del paradigma monumental, evidencia que la enseñanza escolar no se ha modificado sustancialmente. Los cambios sociales y los impactantes saltos tecnológicos ocurridos en ese lapso, tampoco han afectado el núcleo central de este paradigma de enseñanza escolar, en el que se identifican los resabios, las declinaciones y los peores rasgos de las etapas tradicional, activa y tecnicista de la pedagogía, reseñadas antes. En la puesta en práctica de todas ellas, el saber se ha reducido y dejado del lado, y se ha sobrevalorado alternativamente el papel del profesor, del alumno y del proceso.

El paradigma de visitar las obras se caracteriza por:

1. Comunicar una idea ingenua de la ciencia, vinculada a verdades definitivas, certezas, causalidad lineal y simple, y un método único,
2. propiciar una ideología contraria al cuestionamiento a todo nivel, incluido el cuestionamiento del saber a enseñar y enseñado,
3. desconsiderar el origen histórico- social, del conocimiento y del saber,
4. olvidar el papel de las preguntas en el origen del conocimiento y del saber, o trivializarlas,
5. asumir dualismos del tipo: teórico-práctico, cuerpo-mente, emoción-razón, etc.,
6. enfatizar la escisión disciplinar y otorgar escasa importancia a la interdisciplinariedad,
7. inventariar el saber propuesto para enseñar, segmentándolo y parcializándolo,
8. otorgar escasa importancia a la acción individual y social, como origen del conocimiento en matemáticas, física, química, biología, etc.,
9. desconocer la relatividad institucional del saber,
10. desconsiderar la utilidad formativa inherente de las matemáticas y de las ciencias para los ciudadanos,
11. enfatizar el papel del lenguaje oral por sobre el escrito y enseñar las matemáticas y las ciencias de manera exclusivamente narrativa.
12. confundir a la enseñanza con la evaluación, y a esta última con la medición, asumiendo una perspectiva behaviorista .

La TAD aboga por la emergencia de un paradigma de enseñanza alternativo al de visitar las obras, que debería sustituirlo. Sin embargo, no está claro aún cómo el nuevo paradigma podría surgir y mucho menos, volverse dominante, habida cuenta de la preponderancia y la tradición de larga data del paradigma monumental. El

reemplazante aún no nato, ha sido denominado paradigma *de la investigación* y *del cuestionamiento del mundo* (Chevallard 2004, 2007, 2012, 2013, 2017).

El término paradigma parece emplearse aquí de manera más laxa y relativamente alejada de las ideas de Kuhn (1983). Así, algunos investigadores consideran que el paradigma “nuevo” incluye al “viejo”, aunque el primero, requiere cambios radicales e incompatibles con el segundo. Kuhn (1983) relajó la tesis de inconmensurabilidad entre paradigmas rivales, asumiendo la posibilidad de un “diálogo” a través de un diccionario de traducción de términos, entre los habitantes de unos y otros. Sin embargo, nunca consideró a los paradigmas como si fuesen muñecas rusas, encastradas unas en otras, sino más bien como universos paralelos. Tampoco abandonó la idea de que el cambio paradigmático era producto de una revolución y no de una transición. Por todo lo expuesto, remarcamos que, en este contexto, el término paradigma no se usa estrictamente en el sentido de Kuhn.

En la sección siguiente, intentamos, caracterizar de manera más detallada, al paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

La descripción del paradigma de inventariar las obras es muy importante para la formación de profesores, porque rebasa y sintetiza las teorías pedagógicas, que de hecho asumen una didáctica dualista. Así, el análisis y el cuestionamiento del saber y de las transformaciones necesarias para enseñarlo, no constituyen un aspecto central en la formación de los profesores. Tampoco integra esta formación, el estudio de la viabilidad ecológica y económica de la enseñanza de ciertas obras, en una cierta institución. Los profesores se forman en un aislamiento y atemporalidad similar a la que se le reprocha a la escuela, estudiando, en el mejor de los casos, los saberes

segmentados, tal como se encuentran en el currículum y sin ningún cuestionamiento.

Los profesores se forman siendo narrados, tomado como referencia o bien el saber sabio, o bien los saberes escindidos tal como están en los programas escolares de la institución en donde deberán trabajar. Este es sin duda un problema complejo, al que modestamente intentamos aportar en lo que sigue.

# El paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo

Diversos autores vienen señalando la inadecuación del sistema educativo y de la escuela. Para algunos, lo que se aprende en la escuela está muy lejos del mundo de la vida, para otros, es completamente insuficiente para insertarse laboralmente o para continuar con estudios superiores de alto componente científico, y no se adapta a las necesidades del presente, a los cambios permanentes, a los desafíos tecnológicos y laborales, ni logra atender a la diversidad cultural y social. Claro está, esto depende de lo que una determinada sociedad considera que la escolaridad debería aportar, sin embargo, al menos en occidente, existen cuestionamientos recurrentes, focalizados sobre todo en el nivel medio.

Ya en el siglo pasado, Postman y Weingartner (1969) destacaban en su libro *Teaching as a subversive activity,* que la escuela no preparaba a los alumnos para una sociedad caracterizada por el cambio acelerado de conceptos, valores, tecnologías, y que, al revés, enseñaba conceptos fuera de foco (ibid., p. 217). Ellos listaron sin pretensión de agotarlos, cuáles eran esas ideas desenfocadas, que la escuela continuaba y continúa enseñando:

*1. El concepto de "verdad" absoluta, fija e inmutable, particularmente desde una perspectiva bipolar entre el bien y el mal.*

*2. El concepto de certeza. Siempre hay una y solo una respuesta "correcta", y es absolutamente "correcta".*

*3. El concepto de entidad aislada, o sea, "A" es simplemente "A", y punto final, de una vez para siempre.*

*4. El concepto de estados fijos y 'cosas', con el concepto implícito de que si conoces el nombre entiendes la 'cosa'.*

*5. El concepto de causalidad mecánica simple, única; la idea de que cada efecto es el resultado de una sola causa fácilmente identificable.*

*6. El concepto de que las diferencias existen solo en formas paralelas y opuestas: bueno, malo, correcto, incorrecto, sí-no, corto-largo, arriba abajo, etc.*

*7. El concepto de que el conocimiento se da: que emana de una autoridad superior y que debe aceptarse sin cuestionarlo.*

Todas estas características que ellos describen, son compatibles con el paradigma de visitar las obras. Uno de los aspectos más críticos que señalan, es que el no cuestionamiento se enseña. También destacan que una educación de estas características promueve actitudes de pasividad, condescendencia, dogmatismo y autoritarismo, poco apropiadas para pensar la vida actual.

Entonces, ¿cómo se podría enseñar la actitud, o mejor aún, el hábito del cuestionamiento?

La respuesta de Postman y Weintgardner (1969) es que se debe permitir a los niños actuar como preguntadores y buscadores de respuestas. Ellos ponen el ejemplo de una pregunta de biología: *"¿Cuáles son las condiciones para mantener la vida en las plantas?".* Al enfrentar dicha cuestión -suponen- que se dispararían preguntas sobre física, antropología, química, etc.

Si las preguntas son la fuente de todo conocimiento, entonces el currículum para una nueva educación debería pivotar alrededor de la formulación de preguntas. En un currículum de preguntas, las asignaturas deben perder protagonismo. Si no se está dispuesto a abandonar el currículum por disciplinas, habría que reformular la instrucción para que el objeto de estudio de cada disciplina estudia, surja como respuesta a las preguntas planteadas. Los estudiantes dedicarán una gran parte de su tiempo, a

encontrar respuestas a sus preguntas, en los libros, los laboratorios, los periódicos, los televisores, las calles, etc. La formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas van de la mano, y las preguntas deben orientarse a problemas que los alumnos perciban como útiles y realistas (íbid).

En conclusión, las ideas de Postman & Weintgardner (1969) ponen en primer lugar al cuestionamiento, enfatizan la necesidad de alejarse de concepciones disciplinares rígidas, y de las limitaciones de un curriculum basado en disciplinas, como obstáculo al cuestionamiento. Sin embargo, el papel del saber aparece relativamente desdibujado en su interesante planteo.

Por la misma época, también surgieron propuestas sobre la importancia de una instrucción basada en la indagación, conocidas bajo el nombre genérico de inquiry. Analizamos brevemente sus orígenes, objetivos y resultados, en la sección siguiente.

## Inquiry

El Inquiry-based learning (IBL) o Inquiry-based science (IBS) (Schwab, 1962) surgió en USA alrededor de 1960, como un método de enseñanza y aprendizaje por descubrimiento, inspirado en las ideas de John Dewey. Se propone un aprendizaje abierto, sin una meta determinada, donde los estudiantes tienen que construir por sí mismos el resultado del problema o experimento. El profesor los guía al aprendizaje deseado, pero sin hacer explícito el resultado del problema.

La noción de aprendizaje por descubrimiento (Bruner, 1961) busca poner distancia con las formas ortodoxas de repetición y reproducción del conocimiento, propias de la enseñanza tradicional. Sin embargo, si bien a nivel individual, el descubrimiento existe y es innegable, uno no puede menos que advertir y cuestionarse sobre las

dificultades prácticas de una enseñanza masiva, a partir de la cual todo saber sea “descubierto” por cada estudiante.

Varias décadas después, ocurrió a nivel internacional, un proceso de valorización del papel de las actividades experimentales en la enseñanza de las ciencias. Así, en los años noventa, surgieron “nuevos” currículos -principalmente anglosajones- que propusieron desarrollar una cultura científica y difundir una imagen más rica y diversificada de las ciencias y sus procesos. Tales ideas se materializaron en las iniciativas de la American Association for the Advancement of Science[7] (AAAS, 1989), el National Research Council[8] (NRC, 1996), National Center for Education Statistics[9](NCES, 1999), National Middle School Association[10] (NMSA, 2002), National Science Teachers Association[11] (NSTA, 2003), entre otros.

En Europa, surgió el programa Eurydice[12] (2006), y en el mundo entero se cambiaron los planes de estudio,

---

[7] La ***A**merican **A**ssociation for the **A**dvancement of **S**cience* (AAAS) es un organismo internacional para el avance de la ciencia en el mundo. Publica el diario la Ciencia, boletines de noticias científicas, libros e informes. http://www.aaas.org/aboutaaas/.

[8] El programa ***N**ational **R**esearch **C**ouncil* (NRC) promueve la adquisición y difusión del conocimiento en asuntos relacionados con la ciencia, la ingeniería, la tecnología y la salud. http://nationalacademies.org/nrc/.

[9] El ***N**ational **C**enter for **E**ducation **S**tatistics* (NCES) recoge y analiza datos relacionados con la educación en todo el mundo, para servir a la investigación y la educación. http://nces.ed.gov/.

[10] La ***N**ational **M**iddle **S**chool **A**ssociation* (NMSA), desde 2011 *Association for Middle Level Education* (AMLE) conecta maestros, administradores, formadores de docentes, padres y miembros de la comunidad que trabajan con estudiantes en edad escolar entre 10-15 años. Propone mejorar la calidad educativa en todo el mundo (son 58 los países asociados).

[11] La ***N**ational **S**cience **T**eachers **A**ssociation* (NSTA), fundada en USA en 1944, promueve la excelencia y la innovación en la enseñanza de la ciencia y el aprendizaje para todos. La NSTA incluye profesores de ciencias, científicos, representantes de las empresas y la industria, y otras personas involucradas y comprometidas con la educación científica.

[12] *Eurydice* es una red institucional creada por la Comisión Europea en 1980 para impulsar la cooperación en el ámbito educativo, que apoya y facilita la cooperación en el ámbito del aprendizaje permanente, informando sobre los

impulsando una enseñanza de las ciencias basada en la investigación.

Los proyectos denominados Inquiry Based Science Teaching (IBST), Inquiry Based Education, Inquiry Learning, Pedagogy Inquiry, etc., proponen enseñar a partir de tareas más abiertas *"de un mayor nivel cognoscitivo y de una mayor autonomía por parte de los estudiantes"*. Sin embargo, la distinción entre tareas abiertas y guiadas es insuficiente para definir la enseñanza por indagación. La necesidad de evaluar estos "nuevos" programas, llevó a una búsqueda por aclarar la noción de *inquiry*, debido a las diversas maneras de entender en qué consiste la indagación en el aula.

En el trabajo de Minner, et al. (2009) se resumen los resultados de 138 estudios sobre la enseñanza por indagación realizados entre 1984 y 2002. Se intentó aclarar y especificar qué es IBST y describir el impacto de este tipo de enseñanza en el aprendizaje conceptual de los estudiantes de la educación primaria y secundaria en USA, Canadá, Filipinas y Australia. La mayoría de los trabajos revisados se pronunciaron a favor de la enseñanza por indagación, siempre que, los estudiantes asuman un rol activo y puedan llegar a conclusiones a partir de datos. Además mencionan que un currículum sobrecargado de conceptos científicos y de evaluaciones memorísticas continuas en distintas etapas del ciclo educativo, no colaboran con el IBST.

Según Park Rogers y Abell (2008) en el IBSL, los alumnos deben:

---

sistemas educativos y políticas en 34 países y estudiando problemas comunes a los sistemas educativos europeos.

*"Involucrarse en cuestiones orientadas científicamente, dando prioridad a la evidencia, permitiéndoles desarrollar y evaluar las explicaciones que conducen a preguntas orientadas científicamente; formular explicaciones y pruebas dirigidas a preguntas orientadas científicamente; evaluar sus explicaciones a la luz de explicaciones alternativas, reflejando en particular comprensión científica; comunicación y justificación de las explicaciones propuestas " (p. 592).*

Aquí el énfasis en la ciencia y sus características, distinguen el *"full inquiry"* del *"partial inquiry"* o versión débil.

Para el equipo "*Mind the Gap*[13]*: Learning, teaching, research and policy in inquiry-based science education (IBSE)*" la investigación es el corazón del método científico, sin embargo, para ellos *"lo que el científico hace no es lo mismo que la ciencia escolar"* (Jorde, 2009, p. 2). El IBST tiene las características siguientes:

1. *"actividades de aprendizaje basadas en auténticos problemas, donde no hay una respuesta correcta";*
2. *una cierta cantidad de procedimientos experimentales, experimentos y actividades del tipo "hands on activities", incluída la busqueda de información;*
3. *secuencias de aprendizaje autorregulado donde se enfatiza la autonomía de los estudiantes;*
4. *argumentación discursiva y comunicación con los pares ("talking science"). (Jorde, 2009, p. 4)*

En 1996 surge en Francia el programa *"La main à la pâte"* (Charpak et al., 1998, 2005), que intentó transformar la enseñanza de las ciencias en la escuela primaria. Esta

[13] *Mind the Gap* (2008 y 2010) es un proyecto dirigido a usar los principios del IBST para aumentar la cantidad de jóvenes en carreras de ciencia y tecnología. Involucra a Noruega, Dinamarca, Alemania, Hungría, Reino Unido, España y Francia e incluye "paquetes de trabajo" para las prácticas de IBST en los distintos contextos. Actualmente el proyecto se denomina S-team.

sería la versión francesa del Inquiry-Based Science Education (IBSE), orientado a promover el interés de los estudiantes por la ciencia.

En el año 2000, se introdujeron en las clases preparatorias de la post secundaria (CPGE)[14] les *travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE)*. Los alumnos tenían que realizar un trabajo personal, planteando las cuestiones de su interés y proponiendo nuevos problemas a investigar; como lo hacen los científicos. Los TIPE evolucionaron luego hacia los *travaux personnelles encadrés* (TPE), donde se realiza una producción personal y autónoma, grupal o no, articulando más de una disciplina.

Los profesores eligen los temas, de una lista que cada año provee el ministerio de educación francés. El trabajo culmina en una realización concreta, que será objeto de una comunicación oral. Las preguntas "sirven" de hilo conductor a la actividad del alumno y las disciplinas que intervienen se imponen de antemano.

En Inglaterra, el proyecto «Real Science» del National Endowment for Science, Technology and the Arts (NESTA, 2005), considera que el aprendizaje por investigación científica, es una forma de educación científica. Los alumnos formulan preguntas e hipótesis, las someten a prueba y las revisan mediante experimentos y observaciones, y presentan sus conclusiones a otros. La idea general, es que esta forma de enseñanza mejora la comprensión de las prácticas científicas y de los

---

[14] Las *classes préparatoires aux grandes écoles* (CPGE), son parte de la post-secundaria francesa. Se componen de dos años muy intensos que actúan como un curso preparatorio con el objetivo principal de capacitar a los estudiantes de pregrado para la inscripción en los centros de enseñanza superior.

conocimientos científicos y que, esto, debería animar a los alumnos a proseguir estudios científicos.

Los proyectos de *inquiry* mencionados, con mayor o menor debilidad, proponen a la investigación como una manera de difundir las características de la ciencia y sus métodos, con el fin de aumentar el número de estudiantes en las carreras científicas.

Desde los años 60 hasta nuestros días, se ha intentado introducir la investigación en el aula, prescribiendo modificaciones en la enseñanza y el aprendizaje. Inicialmente, se dio importancia a los problemas abiertos versus cerrados. Luego, desde los 90, se enfatizaron aspectos ligados con los procedimientos científicos y con la formación de "estudiantes investigadores". Ciertos proyectos destacan mejoras en la comprensión de los conceptos científicos y de la naturaleza de la ciencia, en la disposición a responder preguntas y en la actitud hacia las ciencias (Gengarelly & Abrams, 2009). Por su parte, el informe Eurydice (2006) considera que, mediante la investigación, se desarrolla el razonamiento científico.

> *El desarrollo de un raciocinio científico reposa en una enseñanza y aprendizajes que subrayan la importancia del desarrollo de una comprensión holística de las actividades y al reflejar procedimientos científicos, un enfoque de aproximación a los científicos profesionales. La investigación sugiere que las ciencias, en el nivel secundario, presentan a veces una visión más" estereotipada", como actividades prácticas (donde las actividades son concebidas para desembocar en conclusiones dictadas o evidentes). La enseñanza primaria parece abierta a las actividades de investigación. (p. 78).*

En síntesis, el movimiento *inquiry* generó nuevos curriculums orientados hacia la denominada *"alfabetización científica"*. Para eso, se introdujeron elementos del *"método científico"* en la educación elemental, se buscó formar *"pequeños científicos"*, y se

propuso una enseñanza basada en preguntas, que se responden usando “el método hipotético-deductivo”.

Las versiones de *inquiry* que hemos documentado, tienen una orientación relativamente positivista y sesgada, de lo que es hacer ciencia. Al exacerbar la importancia de aprender *sobre la ciencia* y sus métodos, se acaba difundiendo una visión estereotipada de la ciencia y se trivializa *“él método científico”*. Por otro lado, las sucesivas desviaciones y declinaciones de la enseñanza por indagación, se han atribuido a la *“mala formación científica de los profesores”* y se ha adoptado un enfoque pedagógico y didáctico a-teórico.

Se puede apreciar que al menos en el terreno de las ideas, se pasó de proyectar una escuela donde la enseñanza por indagación se propuso como la vía para formar ciudadanos críticos, autónomos, no autoritarios, sin precisar muy bien el lugar del saber, a una enseñanza que enfatiza las características de la investigación científica y la promoción de ciudadanos interesados por los métodos de la ciencia, que serían potenciales estudiantes de carreras científicas. De estas tendencias hegemónicas, que pretenden conducir a las personas hacia lo que “debe gustarles”, solo puede producirse lo que se obtiene. Se ha generado un currículum orientado hacia los supuestos intereses de un escasísimo porcentaje de personas que estudiarán ciencias, ignorando a la mayoría de los ciudadanos, que no serán científicos.

## Limitaciones de la enseñanza basada en la investigación científica

Los planes de estudio que introducen la investigación científica en clase, requieren modificaciones de porte, en el sistema educativo. Las investigaciones didácticas se han ocupado de mostrar que los profesores tienen serias dificultades para realizar las modificaciones requeridas,

debido a la carencia de una formación apropiada, sin mencionar restricciones tan severas como las de su formación, de carácter sistémico y sobre las cuales los profesores no tienen ninguna incidencia.

Crawford (2007) destaca que las creencias sobre lo que es la ciencia y sobre su enseñanza, son las que más influyen en el desarrollo de los docentes. Luft (2001) estudia el impacto de un programa de enseñanza por indagación científica en las concepciones y las prácticas de los profesores novatos y experimentados, mostrando que los primeros, cambian sus concepciones más que sus prácticas, mientras que el fenómeno es inverso con los segundos.

Para Windschitl et al. (2008) los profesores debutantes no logran abandonar una "visión mítica del método científico" que reproducen en clase con sus propios alumnos. Por su parte Gyllenpalm et al. (2010) consideran que el desarrollo de una cultura científica requiere una comprensión de la investigación científica y de la naturaleza de la ciencia. Esto supone que los estudiantes de profesorado practiquen la enseñanza por investigación y reflexionen sobre el proceso. Según ellos, los profesores están más preocupados por los aspectos pedagógicos de la investigación y la comprensión de los productos de la ciencia, que, por los procesos de la investigación científica, no siendo esta última considerada como un conocimiento conceptual.

Tang, et. al (2010) señalan las tensiones que surgen en clase cuando los profesores otorgan excesiva importancia a las etapas del método científico en detrimento de las investigaciones producidas por los propios alumnos. La relevancia de la formación científica los profesores se mencionada en el informe Eurydice (2006):

> *Los lazos entre los conocimientos y las competencias científicas de los profesores, las maneras como ellos*

> *enseñan ciencias, así como las consecuencias para los alumnos, son establecidas en muchos estudios. Ha sido demostrado que el nivel de conocimientos de los alumnos está ligado a las competencias de sus profesores en las disciplinas relacionadas. Esto ilumina la importancia de la formación de los profesores y más específicamente de su formación en los procesos científicos" (p. 78).*

Según Blanchard, et al. (2009) uno de los mayores obstáculos del IBSE, es que pocos profesores tienen experiencia en la investigación científica y poseen ideas muy ingenuas sobre ésta.

El equipo «Mind the Gap» estudió el desarrollo de los profesores de secundaria inferior en siete países europeos, con relación a la enseñanza de ciencias basada en indagación (Lipowski & Seidel, 2009). En particular, consideran prometedor al dispositivo SINUS[15] (Ostermeier et al., 2009) desarrollado en Alemania, aunque necesitaría de adaptaciones a los diferentes sistemas educativos, si tuviera que servir de modelo.

En síntesis y en correspondencia con la definición de inquiry, se sobredimensiona el papel de las "creencias de los docentes sobre la ciencia" y no se abandona el paradigma de la visita a las obras. Evidentemente, la formación de los profesores es un punto central, pero el problema es mucho más complejo que sus creencias. Los proyectos de *inquiry* tienen una visión sesgada y limitada del papel de la ciencia en la sociedad, porque apuntan a que haya más científicos, y aunque esto suceda, estos serán una parte ínfima de los ciudadanos. Se necesitan ideas y objetivos más amplios, que habiliten y difundan el

[15] SINUS (Increasing the Efficiency of Mathematics and Science Instruction) es un programa de formación de profesores desarrollado en Alemania y ampliamente testeado.

cuestionamiento del saber a escala social, más allá de las ciencias exactas y naturales y de la escuela.

## Actitudes para cuestionar al mundo

El paradigma de enseñanza de visitar las obras, cruje en todas partes, pero permanece e incluso se disfraza con nuevos trajes, que lejos de propiciar el cuestionamiento, lo anulan. Un principio fundamental del nuevo paradigma de enseñanza, llamado *de la investigación y del cuestionamiento del mundo*, es concebir a la educación como un proceso que se desarrolla durante toda la vida de una persona, sin importar su edad (Chevallard, 2012, 2013). De allí, la importancia y la necesidad de concentrar los esfuerzos didácticos en identificar lo que la gente puede y quiere aprender y cómo puede hacerlo.

La vida del paradigma del cuestionamiento del mundo depende de la adopción, por parte de quienes habitan las instituciones de enseñanza, de cinco actitudes que se traducirán en ciertos gestos didácticos (acciones y formas de hacer) (Chevallard, 2012, 2013), a saber:

1) La actitud de *problematización*, de la cual nace el cuestionamiento.

2) La actitud *herbartiana* (Chevallard, 2012, 2013), consiste en no rechazar ni huir de ninguna pregunta, ni diferir su estudio o ponerlo en espera. Se trata de estar sistemáticamente dispuesto a afrontar situaciones, problemas y preguntas, aunque uno jamás se las haya formulado antes.

3) La actitud *procognitiva* puede entenderse por oposición otra actitud habitual, llamada retrocognitiva, que consiste en ignorar toda pregunta posible y retroceder ante ella. La actitud procognitiva busca siempre conocer hacia el futuro, ampliando el campo de interés, aunque inicialmente no se sepa casi nada del asunto. Un ciudadano

*procognitivo* está preparado para estudiar y aprender siempre, campos de conocimiento nuevos para él. Así, será una persona bien informada y dispuesta a estudiar obras desconocidas, solo porque algún interés le requiere su estudio. El paradigma monumental de enseñanza promueve la *retrocognición*, pues los estudiantes son interrogados únicamente sobre lo que ya se enseñó, a tal punto, que se considera ilegítimo preguntar aquello que, en sentido estricto, no fue enseñado, en el sentido de mencionado, tratado, etc.

4) La actitud exotérica se opone a la ilusión esotérica de "*que es preciso saberlo todo"*. Al contrario, se trata de permitirse no saber, aún en el dominio de la propia especialidad. De este modo, es posible estudiar un problema o una pregunta que requiere conocimientos que se poseen, sintiéndose capaz de conquistar lo que se ignora. En general, los científicos tienen una actitud humilde y exotérica frente al conocimiento, porque saben del carácter provisorio de aquello que hoy, se da por científicamente válido. Según Chevallard (2012, 2013) todos los ciudadanos, incluso los especialistas, deberían pensarse como exotéricos, afrontando la propia ignorancia y progresando tanto como sea posible y útil, en el conocimiento involucrado en el proyecto al cual están abocados.

5) La actitud de *enciclopedista ordinario*, consiste en no autoexcluirse ni considerarse ajeno de los diversos campos de conocimiento posibles.

Los ciudadanos de hoy, necesitan educarse toda la vida y cultivar constantemente estas actitudes características del paradigma escolar del cuestionamiento, asumiendo en la escuela y más allá de ella, la posición de investigador. Esto de ninguna manera diluye o desdibuja los objetos de saber, más bien amplía en campo de los saberes que una persona necesita estudiar y produce relaciones diferentes

con ellos, que se traducen en una nueva epistemología escolar.

Estas actitudes indispensables para quienes habitan las instituciones de enseñanza, en cualquier posición, también rigen para aquellas en las cuales los profesores se forman profesionalmente. Pero, como hemos venido señalando, no son las que caracterizan las formas de hacer actuales en las instituciones mencionadas. Por otro lado, su desarrollo no es inmediato ni puede darse aisladamente, pues depende de un proceso afectado por todos los niveles de la escala de codeterminación.

¿Cómo formar profesores para enseñar ciencias exactas y naturales a partir del cuestionamiento y de la indagación? Una aproximación de orden cero, sería hacerlo estudiando preguntas dentro de estas disciplinas. La TAD propuso un modelo para estudiar cualquier pregunta, que ha dado lugar a un dispositivo didáctico llamado Recorridos de Estudio e Investigación (REI). En el capítulo tres, describimos tales dispositivos y en los siguientes mostramos cómo los hemos utilizado en la formación de profesores.

## Modelo Praxeológico de Referencia

En el paradigma del cuestionamiento del mundo, la enseñanza gira en torno a investigar y estudiar una pregunta Q, lo cual implica a los actores del proceso de estudio, en un trabajo relativamente similar al desarrollado por un equipo de investigación. Dicho proceso se basa en las posibles preguntas derivadas que pueden emerger de la pregunta generatriz Q y en las obras y demás recursos que potencialmente, cada pregunta puede activar.

El estudio de una pregunta no es lineal, sino arborescente, y genera diversos caminos o recorridos, que el investigador, el didacta, el profesor, o quien sea el encargado de dirigir el proceso de estudio, debe poder desarrollar. El análisis de las praxeologías que se pueden encontrar o reencontrar en los caminos posibles, integran lo que Chevallard (2012) denomina un modelo praxeológico de referencia (MPR).

De manera general, cuando una persona se aproxima a un campo de conocimiento con la intención de estudiar una pregunta Q, debe poder construir al menos un MPR relativo a las obras (cualquiera sea su naturaleza) de ese campo. El MPR es un análisis siempre provisorio y potencialmente abierto de praxeologías que el estudio de Q hará o podría hacer encontrar o reencontrar.

El investigador en didáctica, que intenta modificar un fenómeno didáctico, debe proponer explícitamente, un cambio en la forma de concebir el conocimiento en la institución. Es decir que, será necesario caracterizar las praxeologías relativas al conocimiento involucrado en esa institución. De este modo, basándose en el análisis del currículum, de los libros de texto, de la observación y análisis de clases, entre otros, los investigadores conciben un modelo praxeológico de referencia (MPR) dinámico,

que les permite identificar algunos fenómenos didácticos que afectan el proceso de estudio.

El MPR puede presentarse de diversas formas, tales como un conjunto de praxeologías de complejidad creciente (Sierra, 2007) o una arborescencia de preguntas y respuestas iniciadas por una pregunta generadora (Barquero, 2009; Barquero et al., 2011; Gazzola, 2018; Llanos y Otero, 2013a, b, c; Parra, 2013; Oliveira Lucas, 2015; Salgado et. al., 2017, 2019; Otero, et. al., 2016; Otero et al., 2021).

El MPR permite al investigador tomar distancia y ejecutar el principio de la doble ruptura con el saber sabio y con el saber escolar, para proponer explícitamente modelos alternativos para el conocimiento a enseñar.

# Capítulo 3

# LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACION

## La pedagogía herbartiana

En diversos escritos Yves Chevallard reconoce y menciona las ideas del educador, pedagogo y filósofo Johann Friedrich Herbart (1776 – 1841) proponiendo la noción de modelo herbartiano y de actitud herbartiana. En esta sección intentamos aproximarnos a las ideas de Herbart, que revolucionaron la pedagogía de su tiempo y cuya influencia permanece hasta nuestros días.

Un concepto clave de la teoría educacional de Herbart es el de *instrucción educativa*. Además de diferenciar entre instrucción y educación, Herbart revolucionó en su época, la relación entre ellas. Los asuntos relativos a la educación y a la instrucción son tratados conjuntamente y el concepto de "instrucción" es subordinado al de "educación". Herbart se opuso a los métodos educativos basados en el castigo o la humillación y estableció que, la instrucción, léase la enseñanza, es "la materia principal de la educación". Además, intentó demostrar en la práctica, que es posible "educar mediante la instrucción", es decir que en todo acto educativo o pedagógico interviene la acción de instruir o enseñar.

Para Herbart la *instrucción educativa* debía basarse tanto en la enseñanza de conocimientos estético-literarios como matemático-científicos. Su propuesta consistía en impartir una sólida formación matemática y también, iniciar a los estudiantes en los métodos experimentales de las ciencias naturales, lo cual es extraordinario para los comienzos del siglo XIX.

El problema de los métodos pedagógicos conduce a Herbart a proponer la doctrina psicológica del "interés". El interés tiene gran importancia en esta concepción de la instrucción educativa, pues incluye en un pie de igualdad a "la poesía y las matemáticas". Las matemáticas debían integrar el programa de enseñanza tanto por su utilidad

práctica e importancia técnica, como por el hecho de que son un medio para cultivar la atención. La literatura por su parte, sirve para suscitar un vivo interés por los sentimientos de otros seres humanos, ya que, a partir de ella, las relaciones humanas se exponen a los niños de la forma más sencilla posible.

El escrito de Herbart (1818) *"Evaluación pedagógica sobre la clase escolar"*, precisa las características de la instrucción educativa y su diferencia de fines y de medios con la instrucción tradicional. Mientras que el objetivo de la instrucción tradicional es transmitir al alumno el máximo de conocimientos y aptitudes útiles a través de "la ejercitación y la calificación del aprendiz", Herbart pone en el primer plano de la instrucción educativa al interés:

> *"Es sobradamente conocido el precepto de que el docente debe intentar interesar a sus alumnos por lo que enseña. Sin embargo, este precepto suele ser presentado y percibido como si el estudio fuese el fin y el interés el medio. Yo invierto esta relación. El estudio debe servir para fomentar el interés. Los estudios son por naturaleza pasajeros, mientras que el interés debe subsistir toda la vida".*

La centralidad otorgada por Herbart a la instrucción (enseñanza) enfocada en la literatura, las matemáticas y las ciencias, para despertar intereses polivalentes, está presente en los REI. Cuando se propone el estudio de una pregunta, que moviliza el interés del alumno, y es el motor de la enseñanza, a la vez que convoca a las praxeologías relevantes, también se asume que el saber es necesario, pero efímero, cambiante e inacabado. Estas ideas permiten comprender mejor el papel de la pedagogía de Herbart en la TAD.

## Modelo Herbartiano

Para responder la pregunta ¿En qué consiste estudiar una obra? la TAD ha desarrollado un modelo, al que ha denominado Herbartiano. Es importante recordar aquí,

que las preguntas son también obras fundamentales, creadas útilmente por los hombres.

Dicho modelo explicita lo que sucede cuando un estudiante x o una clase X estudia una pregunta Q con la supervisión de Y, o cuándo un investigador ξ, o un equipo de investigación Θ estudia una pregunta Q posiblemente con la supervisión de un director de investigación $\zeta$, o un conjunto de directores Z, formalmente se escribe:

S (X; Y; Q) ➥ $R$ (1)

La notación utilizada en (1), indica que cuando se explora una pregunta Q, el sistema didáctico o el sistema de investigación debe producir una respuesta R (indicado con la flecha➥) (Chevallard, 2009). La respuesta suele escribirse con un corazón R♥, para destacar que dicha respuesta estará en el corazón del sistema didáctico, y que durante un tiempo será la respuesta "autorizada" a Q. Una respuesta no es solo una afirmación, sino una praxeología.

S (X; Y; Q) ➥R♥(2)

El símbolo ♥ en el exponente de R, representa la relatividad institucional del saber. Es decir que la respuesta se produce bajo determinadas condiciones y limitaciones propias de esa institución. La elaboración de R♥ a partir de *Q* supone entonces la “fabricación”, por parte del sistema S, de un *medio didáctico M*, un medio para explorar y construir la respuesta a Q. Los estudiantes o investigadores recolectan diversos instrumentos materiales o no. Esto conduce al denominado esquema Herbartiano semidesarrollado:

[S (X; Y; Q)➦M] ➥ $R$(3)

Así, el sistema didáctico S construye y organiza (➦) el medio *M* con el cual generará o producirá (➥) una respuesta R♥. La notación indica que la elaboración del medio *M*, ocurre en un proceso articulado con el de la

elaboración de la respuesta $R^\heartsuit$. El medio $M$ no está construido de antemano, se construye mientras se buscan las respuestas. La construcción de $M$ requiere activar en cinco tiempos los gestos: *observar, analizar, evaluar, desarrollar, difundir y defender* objetos, obras, recursos, información, datos, etc. que puedan incorporarse, total o parcialmente al medio y ser parte indispensable en la construcción de $R^\heartsuit$.

El medio M es el conjunto de todos los recursos útiles para la construcción de $R^\heartsuit$ y está compuesto por posibles respuestas existentes a Q, propuestas por otras personas o instituciones, que se escriben como $R_i^\diamond$ para $i = 1, \dots, n$. Por tratarse de respuestas "previamente construidas", que están al alcance de la comunidad de estudio, se las llama etiquetadas, así, el diamante representa el sello o la marca de alguna institución o persona. Por ejemplo, un profesor, o un manual o una página web son instituciones que, de hecho, imprimen su sello a las respuestas.

Además, para que las respuestas $1 \leq R_i^\diamond \leq m$ tengan sentido, el sistema didáctico puede recurrir a varias clases de obras, tales como teorías, experimentos, narrativas históricas, etc., denotadas como $O_{m+1}$, $O_{m+2}$, ..., $O_n$. Una obra se define como:

> *[...] toda producción humana que permita aportar respuesta a una o varios tipos de preguntas [...] Entre las obras, podemos colocar, por ejemplo, la ciudad, la moneda, la cirugía, los números decimales, la geometría euclidiana, la teoría de caos, el Estado, la didáctica de la matemática, el teatro, las leyes, corridas de toros [...] La sociedad se constituye por una acumulación más o menos ordenada de obras, que dan cada una, elementos de respuestas a algunas cuestiones más o menos vitales. [...] Lo que se denomina usualmente la obra de un autor [...] no es más que un tipo muy particular de obra, una obra que se puede decir concluida [...] Pero la mayor parte de las obras son obras anónimas, y obras abiertas, frutos de la acción de un colectivo innumerable, reclutado en la sucesión de generaciones (Chevallard, 2001, p. 2-3).*

Para usar estas obras, tanto el estudiante como el investigador, tienen que estudiarlas, a partir de la formulación de preguntas derivadas de la generatriz, tales como $Q_j$ para $j = n + 1, \dots, m$.

El sistema didáctico puede necesitar de trabajos empíricos o de conjuntos de datos obtenidos por el sistema o no, representados con la letra D. Entonces, por extensión el medio se escribe:

$$M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge},, \dots, R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p, D_p, D_{p+1}, \dots Dq\}$$

Cualquiera de los elementos mencionados integrará el medio M, siempre que sean considerados instrumentos total o parcialmente útiles para construir la respuesta $R^{\blacktriangledown}$. Estos componentes de M serán convenientemente estudiados y utilizados en el momento oportuno, de la manera más efectiva y eficaz posible (Chevallard, 2009).

Se trata de estudiar lo necesario, lo útil, lo efectivamente oportuno para construir la respuesta $R^{\blacktriangledown}$. Esa respuesta no es universalmente válida, es decir, el medio se construye según la relación de los integrantes de la comunidad de estudio con el saber y la respuesta se produce con ese medio.

De este modo se completa el modelo herbartiano desarrollado.

$$[S(X;Y;Q) \rightharpoonup \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p, D_p, \dots Dq\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit} (4)$$

El modelo herbartiano, proporciona una metodología para desarrollar el tipo de proceso de estudio e investigación característico, del funcionamiento de los sistemas didácticos en el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2012).

Actualmente, los Recorridos de Estudio e Investigación, son los dispositivos didácticos propuestos por la TAD, que mejor interpretan el proceso formulado en el modelo

herbartiano y a las características del paradigma de la investigación y el cuestionamiento del mundo.

## Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los REI parten de una pregunta generatriz Q, tal que la construcción de una posible respuesta conduce a analizar preguntas derivadas de Q en función de las necesidades de conocimiento generadas por el estudio de Q, y también en función de las decisiones tomadas por el grupo de estudio (Chevallard, 2013b). Algunos ejemplos de preguntas generatrices son: ¿Cómo hacer un cálculo tratándose de números que incluyen muchas cifras?, ¿Cómo determinar la distancia entre dos puntos, accesibles o no, del espacio topográfico?, ¿Qué fuerza ejercer para vencer una resistencia dada?, ¿Cómo determinar uno u otro elemento de una figura trazada en una hoja cuando algunos de sus elementos útiles caen fuera de esa hoja?, ¿Cómo determinar el costo de utilización de un teléfono celular en función del uso que se hace de él? (Chevallard, 2013b).

Pueden encontrarse ejemplos de REI desarrollados en argentina en Gazzola (2018); Donvito et al. (2014); Llanos y Otero (2013 a, b c, 2015); Otero, et al. (2012); Otero, Llanos et al. (2014); Parra (2013); Parra y Otero (2017, 2018); Otero, et al. (2015, 2017); Salgado et al. (2017, 2018); Salgado (2019).

La respuesta a Q se elabora siguiendo el modelo que propone el esquema herbartiano desarrollado (4), que Chevallard (2004, 2005) utiliza para definir el constructo *recorridos de estudio y de investigación* (REI), cuyas características esenciales sintetizamos de la siguiente manera (Parra y Otero, 2018):

> *-Un REI es generado a partir de una pregunta Q, denominada generatriz pues su respuesta no es de construcción inmediata. Será necesario formular sub-preguntas, denominadas preguntas derivadas.*

> *-La construcción del medio didáctico M es simultánea a la construcción de respuestas: es posible incorporar en cualquier momento del proceso de estudio cualquier recurso que sea aceptado y validado por la comunidad de estudio.*
> *-Esta comunidad puede incorporar cualquier actor en cualquier instancia del proceso de estudio, es decir, a cualquier persona o institución que sea útil y/o pueda realizar aportes en la construcción de las respuestas.*
> *-El lugar del profesor no es el del poseedor absoluto del saber: es considerado el director del proceso de estudio (Chevallard, 2009); un recurso, un sistema de información más que es parte de M.*
> *-Los estudiantes amplían sus posibilidades de acción: formulan preguntas, proponen recursos, fuentes de información, construyen respuestas, las evalúan, las difunden, defienden, y reciben, de manera crítica, las respuestas de otros estudiantes (Chevallard, 2012).*
> *-En esencia, el desarrollo de un REI es una actividad de modelización, entendida como un proceso cuyo producto es un modelo que permite responder la pregunta Q, y no como la mera aplicación de un saber ya estudiado. Para la TAD, la modelización puede ser tanto intra matemática como extra matemática. La primera ocurre cuando el proceso y el producto no dependen más que de la disciplina matemática. La segunda, cuando son necesarias una o varias disciplinas diferentes a la matemática, por ejemplo, la física, la biología, la geografía, etc. El tipo de modelización de un REI dependerá de la pregunta Q, es decir, si la pregunta Q es una pregunta codisciplinar, entonces la modelización será extramatemática, esto equivale a la inmersión en las praxeologías de las disciplinas involucradas. Si la pregunta Q es mono disciplinar, entonces la modelización es intramatemática (Parra y Otero, 2018, p.5).*

Asimismo, la amplitud del recorrido dependerá de la pregunta generatriz y de la gestión de la misma.

> *De una manera subrepticia, el profesor puede imponer determinado recorrido que lleva la clase a encontrarse —y enfrentarse— con nociones matemáticas elegidas de antemano por el mismo profesor. Más sutilmente, el profesor puede haber elegido la cuestión por indagar de tal modo que, bajo las restricciones imperantes, el recorrido pase casi necesariamente por tal o cual obra matemática. En el primer caso hablo de recorrido cerrado; en el segundo, de recorrido semiabierto. Llamaré abierto a un recorrido en el que el papel desempeñado por el profesor es puramente negativo, en el sentido de que el profesor, en cuanto «jefe de indagación», se conforma con imponer de vez en cuando la decisión de no ir a encontrar tal o cual obra, que le parece estar aún fuera del alcance del grupo de estudiantes. Solo en este caso hablaré de recorrido abierto (Chevallard, 2017, p. 168-169).*

Resumiendo, en una enseñanza por REI será necesario construir una respuesta a una pregunta generatriz y para ello no basta con la simple búsqueda de información, habrá que construir o reconstruir un conjunto de praxeologías a partir de la elaboración del medio *M*. Este proceso requiere activar una serie de prácticas o “gestos didácticos” denominados “dialécticas”. En la sección siguiente describimos cada dialéctica detallando previamente la génesis de tal noción.

## Dialécticas en el desarrollo de un REI

Las acciones o prácticas que ocurren en el desarrollo de una clase pueden encuadrarse en diferentes *gestos dialécticos*: del estudio y de la investigación; del individuo y del colectivo; del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica; del tema y fuera-de-tema; del paracaidista y de las trufas; de las cajas negras y cajas claras; media-medio; de la lectura y de la escritura, y de la difusión y de la recepción (Chevallard, 2001, 2013b).

En los polos de una dialéctica no hay dualidad, sino un proceso interactivo, una interrelación entre ellos, que genera “algo nuevo”. Por ejemplo: entrar o salir del tema son acciones contrapuestas, no duales, una acción llama a la otra. Dentro de esta dialéctica, si se comenzó a estudiar un asunto, habrá también que decidir cuándo dejar de hacerlo, pero esta dinámica produce que el estudio ocurra de una manera “nueva” dirigida por el interés de responder a un cuestionamiento. En Parra y Otero (2018) se presenta un análisis detallado del origen de la noción de REI y se recopilan los REI desarrollados y publicados hasta la fecha.

Dialéctica *del estudio y de la investigación*: la búsqueda de respuestas a una pregunta generatriz combina el estudio de praxeologías, disponibles en la cultura escolar (las mencionadas $R^{\lozenge}$), con la formulación de nuevas preguntas (las preguntas derivadas). Es decir, responder una pregunta generatriz genera un cuestionamiento de las obras o saberes que están vinculados a esa pregunta. Este cuestionamiento provoca una investigación de tales obras y a su vez esta investigación produce estudios específicos. Así se concreta una dialéctica: una investigación genera un estudio y un estudio, una nueva investigación. Estas prácticas se manifiestan, por ejemplo, en buscar información en algún media: por ejemplo, Internet, libros de texto, profesores de diversas disciplinas, profesionales del área, etc.; en identificar esas respuestas pre construidas; en estudiarlas, adaptarlas; en formular las preguntas derivadas; etc.

Dialéctica *del individuo y del colectivo*: la respuesta que se elabora en un REI es el proceso y producto de un trabajo colectivo. Aquí “colectivo” no es lo mismo que “grupal”. En el primer caso, cada actor del proceso de estudio, reunidos en grupos o no, puede seguir el recorrido que desee, pero se llega a un momento en el que se deberá llegar en un acuerdo (implícito en la mayoría de los casos) sobre el

camino a seguir. Según Chevallard (2013b) cada miembro de la comunidad de estudio debe considerarse libre de perseguir un estudio e investigar relativamente respecto a las preguntas, pero sin dejar de contribuir al conjunto. En el segundo caso, el calificativo "grupal" alude más bien a una manera de agrupamiento de los integrantes, y la respuesta producida aquí no necesariamente puede estar consensuada por cada integrante del grupo. Por esta razón, la dialéctica se nombra "del individuo y del colectivo": en conjunto y de forma colaborativa, los miembros de la comunidad de estudio deberán decidir sobre las cuestiones derivadas a responder; tomar decisiones entre los integrantes de cada grupo en función de cómo responder a las preguntas; acordar y consensuar respecto a las decisiones anteriores; acordar y consensuar respecto a la manera de desarrollar las puestas en común de las respuestas construidas; distribuir tareas entre los miembros de la clase; entre otras acciones.

Dialéctica *del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctico*: la construcción del MPR es entre otras, una de las instancias en donde esta dialéctica se manifiesta. Para construir un MPR es necesario realizar un análisis profundo de cada una de las posibilidades de respuesta a la pregunta generatriz, de las hipótesis de partida en caso que se consideren, de las preguntas derivadas, de las praxeologías que se necesitan para construir las respuestas, sus elementos, alcances y limitaciones y los modelos construidos en los posibles recorridos. En el proceso de estudio, esta dialéctica comprende acciones tales como analizar las respuestas preconstruidas y decidir qué y cuánto estudiar de esas respuestas; analizar la información obtenida de diferentes sistemas de información; analizar preguntas formuladas dentro de cada grupo de estudio; precisar las técnicas, tecnologías y teorías que componen las diferentes respuestas preconstruidas; sintetizar la información obtenida en los

diferentes media priorizando lo que es necesario y adecuado para aportar respuestas a las preguntas; sintetizar las respuestas a las preguntas derivadas de la generatriz; etc. En cualquier caso, construir una respuesta a una pregunta no se limita a buscar, investigar y estudiar los saberes útiles para construir la respuesta. Es necesario concretar un análisis de esos saberes para determinar qué es lo útil, lo funcional para la construcción de la respuesta buscada. Este análisis implica la realización de una síntesis, entendida no como un resumen de esos saberes sino como una producción colectiva de cada uno de los componentes considerados componentes del medio de elaboración de la respuesta.

Dialéctica *del tema y fuera-de-tema*: La búsqueda de respuestas a una pregunta no es lineal y directa. Así, una auténtica pregunta generatriz conducirá inevitablemente a salirse del "tema". Es decir, provocará la necesidad de permanecer, durante diferentes períodos de tiempo, en la exploración de aquellos componentes del medio seleccionados para construir R, debiendo luego que volver al "tema" de partida. Se podría considerar que estas "salidas momentáneas" provocan un estudio bajo los sistemas clásicos S (X; Y; O), donde O es el o los componentes del medio en el cuál o en los cuáles fue necesario permanecer y estudiar. No bastará con considerar los componentes del medio tal como han sido introducidos, sino será necesario explorarlos, analizarlos, describirlos, desarrollarlos, adaptarlos y evaluarlos. Estas acciones pueden descartar elementos que en primera instancia habían sido incorporados en el medio pero que luego resultaron no ser pertinentes a la construcción de R.

Dialéctica *del paracaidista y de las trufas*: los procesos de estudio y de investigación que tienen como punto de partida una pregunta generatriz necesitan "rastrillar" áreas amplias, de gran alcance, áreas donde se estima puede encontrase un saber útil a la construcción de una

respuesta. Una vez identificadas las áreas pertinentes es necesario realizar enfoques cada vez más próximos con el objetivo de identificar las "pepitas" – las "trufas" – que permitirán progresar en el estudio e investigación. Los términos "paracaidista" y "trufas" se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores en paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio, mientras los buscadores de trufas sacan a la luz tesoros enterrados. "Buscadores de trufas y "paracaidistas: los primeros hurgan en tormo a sí con las narices metidas en la tierra; en tanto que los segundos descienden en medio de las nubes, inspeccionando el panorama de todo el campo, pero desde una altura tan elevada que no alcanzan a percibir con claridad nada en detalle" (Álvarez, 1990, p. 99). Por otro lado, las trufas son un producto muy costoso y codiciado, durante un proceso de estudio, es necesario revisar grandes espacios de conocimiento para encontrar aquel que es particularmente valioso útil.

Dialéctica de las *cajas negras y cajas claras*: en una enseñanza tradicional, el conocimiento debe estudiarse porque así se ha explicitado en el programa de estudios, sin cuestionar demasiado su utilidad, por qué y para qué de su estudio, e incluso, se transmite la engañosa idea de que es posible conocer todo de algún asunto. En el desarrollo de un REI, en cambio, se trata de buscar un nivel intermedio sobre cuánto y qué estudiar de una obra. Este nivel es considerado como el nivel de gris más óptimo en función de una necesidad. Se estimula así el estudio de los saberes pertinentes, los necesarios para "clarificar" algunos aspectos de las obras que son necesarias y dejar en la "oscuridad" los que no lo son. Cada uno de los gestos del modelo a cinco tiempos (observar, analizar, evaluar, desarrollar, difundir y defender) determinará finalmente el

nivel de gris de cada componente del medio más adecuado para la construcción de la respuesta.

Dialéctica *media (sistema de información)-medio (de estudio)* (o de la conjetura y de la prueba): el ingreso en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento concibe un medio didáctico más próximo al medio desarrollado en una práctica de investigación. El medio de estudio no está definido de antemano, sino que se construye y sus componentes son puestos a prueba en paralelo a la construcción de respuestas. Esta concepción de medio, más amplio y abierto, permite el ingreso a él de cualquier recurso proveniente de diferentes fuentes de información, diferentes medias. En una enseñanza monumental, la única media, en tanto que sistema de información del que dispone el estudiante es el profesor. En un REI, en cambio, el estudiante puede considerar e incorporar al medio de estudio una obra reencontrada en cualquiera otra media. Chevallard (2008) define *media* como cualquier sistema que represente una parte del mundo natural o social destinado a un público específico: el "curso" de un profesor, un artículo de química, una revista, un periódico, un sitio de Internet, etc. En las primeras formulaciones esta dialéctica se llamó de la conjetura y de la prueba. Todo saber es conjetural y debe ponerse a prueba, para establecer sus alcances y limitaciones, así como las condiciones y limitaciones de su desarrollo.

Dialéctica de *la lectura y de la escritura*: el proceso de búsquedas de respuestas disponibles en los diferentes medias o sistemas de información, requiere "deconstruir" estas respuestas, desglosarlas. Es preciso identificar, separar, "leer" las obras que pueden servir para elaborar la respuesta buscada. Esta "lectura" activa así, en principio, tres tipos de tareas: *observar, analizar y evaluar* estas respuestas para luego, activar otros tres tipos de tareas, más propios de la práctica de la "escritura": *desarrollar*,

*difundir* y *defender* la respuesta producida. Esta dialéctica incita al desarrollo de diversas técnicas de escritura según se trate de diarios de clase, notas de síntesis, glosarios, producción final, etc.

Dialéctica *de la difusión y de la recepción*: una vez construida la respuesta, cada miembro o grupo de estudio debe difundirla, darla a conocer, explicando sus componentes y justificando las elecciones realizadas. Esta difusión no consiste en una simple presentación de la respuesta, sino que debe ser una difusión que considere la recepción del resto de la comunidad, es decir, una difusión que considere los cuestionamientos, las aceptaciones y resistencias del resto de la clase. La enseñanza monumental es narrativa, los encuentros con las obras son relativamente superficiales y están basados en prácticas orales mayoritariamente a cargo del profesor, a las que se suele denominar explicación. En el caso de los REI, las difusiones se fundamentan en el medio ambiente organizado para elaborar la respuesta, es decir se trata de una difusión epistémica.

La implementación de un REI en los sistemas escolares actuales es muy compleja, porque no se dispone de la infraestructura necesaria y se requieren cambios radicales que sustituyan el monumentalismo imperante por un paradigma basado en el cuestionamiento del mundo. La investigación en torno a la noción de REI es relevante porque si bien existe una larga tradición de intentos basados en el *inquiry*, estos suelen responder a una concepción empirista y a-teórica, cuyos supuestos filosóficos y epistémicos son muy diferentes a los de la TAD (Otero et al., 2013).

# Capítulo 4

# MODELIZACION Y CUESTIONAMIENTO DEL MUNDO

## Modelos científicos y modelización

La enseñanza, el aprendizaje y el papel de la modelización científica en el curriculum de matemáticas y de ciencias en todos los niveles de la educación formal, es objeto de investigación desde hace mucho tiempo y de actualidad creciente. No nos referimos aquí solo a la modelización matemática, sino al intento, no exento de riesgos, de proponer una noción de modelización que involucre tanto a las ciencias formales como a las fácticas o empíricas.

En el ámbito de la Epistemología de las Ciencias, algunos epistemólogos consideran que se puede adoptar una única noción de modelo, subyacente a los usos propios de las ciencias formales y las fácticas (Suppes, 1960; Falgueras, 1994).

> *"Un modelo es un sistema mediante el que se postula una representación conceptual de un asunto determinado –real o ficticio- conforme a determinada finalidad. Dicha representación conceptual es un sistema abstracto" (Falgueras, 1994, p. 237).*

Epistemólogos como Klimovsky (1990, p. 162), consideran que el término modelo es uno de los *"más polisémicos del discurso epistemológico"* y aluden a las considerables diferencias entre la concepción de modelo adoptada por las ciencias formales y las ciencias fácticas (Klimosvsky, 1990, Lombardi, 2011, Cassini, 2017). En este sentido, los modelos propios de la lógica y las matemáticas siempre son una interpretación de un sistema axiomático, o de una teoría axiomática. En esa interpretación, todos los axiomas y todos los teoremas del sistema resultan verdaderos (Cassini, 2011). Así entendida, la matemática se dedica a estudiar las propiedades y la estructura de un tipo de sistemas formales, llamados axiomáticos.

Un sistema axiomático es un conjunto de cuasi proposiciones llamadas axiomas -que son puramente sintácticas y carecen de valor de verdad- y de relaciones llamadas teoremas, que se obtienen deductivamente a partir de los axiomas, siguiendo una cierta lógica subyacente. Aunque los sistemas axiomáticos tienen propiedades sintácticas, no se les aplica la noción de verdad, porque las cuasi proposiciones son puramente formales y carecen de significado.

Cuando los axiomas y los teoremas se interpretan en términos de entidades, de funciones u objetos, las cuasi proposiciones se transforman en proposiciones, que tienen significado y admiten un valor de verdad. Es decir que, interpretar un sistema axiomático, es un proceso mediante el cual se propone un posible modelo de dicho sistema, incorporándole propiedades semánticas.

El proceso inverso a la interpretación se llama formalización, y consiste en eliminar y abstraer cualquier significado de un modelo de un cierto sistema. En la Figura 1 se representan ambos procesos, que relacionan a un sistema axiomático con un modelo y viceversa. Esta manera de entender el papel de los modelos científicos se denomina deductivista.

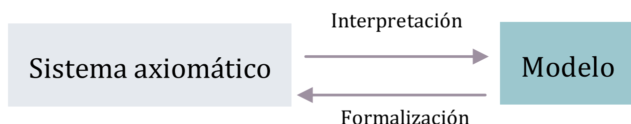



Figura 1. Relaciones entre sistemas axiomáticos y modelos (Klimovsky y Boido, 2005, p. 164)

En el ámbito de la física, por ejemplo, la mecánica clásica es una teoría fáctica que consiste en un discurso semántico sobre el movimiento de los cuerpos. Si se abstraen las interpretaciones, se obtiene el sistema axiomático formal que formaliza a la mecánica clásica,

llamado cálculo infinitesimal lineal (Lombardi, 2011). Es decir que la mecánica clásica es una interpretación o un modelo del cálculo infinitesimal lineal.

Como ya se mencionó, en la postura deductivista no es posible homologar el significado de modelo en ciencias formales y fácticas. Al considerar que los modelos no forman parte de las teorías científicas y que una teoría es un sistema hipotético deductivo, la consistencia de la teoría se evalúa y depende de que exista al menos un modelo verdadero de ella, es decir que exista al menos una interpretación que hace verdaderos los axiomas.

Sin embargo, esta no es la manera habitual en que los físicos usan el término modelo. Un físico dirá que ha construido un modelo, cuando ha realizado una formalización a partir de una estructura concreta (Klimovsky 1990, p. 168), y el físico llamará modelo matemático a esta formalización. Esto produce la identificación, epistemológicamente confusa, entre el modelo fáctico de la mecánica clásica con el "modelo matemático" asociado a ella. Desde un punto de vista epistemológico, se trataría de un sistema axiomático formal que no se refiere a nada, lo cual es muy diferente de un modelo propio de las ciencias fácticas. Esta confusión produce consecuencias graves en la enseñanza de la física, tanto cuando se la reduce al formalismo matemático, como cuando se aboga por una "física sin fórmulas".

Según Lombardi (2011) la noción de modelo en ciencias fácticas involucra tres niveles bien diferenciados: el sistema "real" que la teoría fáctica pretende describir, el modelo fáctico entendido como un sistema abstracto que es el producto de un proceso de modelización y si se quiere, el "modelo matemático", que es la estructura sintáctica de la teoría fáctica en cuestión. En cierto modo, puede parecer excesivo denominar modelo matemático a esta estructura sintáctica, que, aunque se encuentre

incrustada en un modelo fáctico, carece de características semánticas.

Un aspecto muy importante de los modelos en ciencias fácticas, es que no son únicos. Pueden existir diversos modelos de un sistema, cuya elección depende de las condiciones o los aspectos del sistema que se pretenden estudiar. Así, en el mundo cotidiano de bajas velocidades, se utiliza mayoritariamente el modelo de la mecánica clásica, y no el de la relativista. Al estudiar los fenómenos de la reflexión y la refracción de la luz en un espejo plano, se puede utilizar el modelo de rayos de la óptica geométrica o la óptica ondulatoria, y también estos fenómenos pueden explicarse más profundamente a partir de la teoría cuántica. Pero los fenómenos de difracción e interferencia, requerirán al menos del modelo de la óptica ondulatoria siendo imposible explicar estos fenómenos con el modelo de rayos. Es decir que, no es posible referirse a un modelo cómo “mejor” que otro, de una manera absoluta.

Desde la segunda mitad del siglo XX, la epistemología ha otorgado gran importancia al estudio del papel de los modelos, a su relación con la verdad y con el mundo real y a las funciones que ellos tienen en la práctica científica. Los trabajos de Hesse (1953, 1961, 1966), Black (1954, 1962), Wartofsky (1966); Bunge (1972, 1973) y Leatherdale (1974) fueron pioneros al estudiar la función de los modelos en ciencia, a la vez que cuestionaron la concepción deductivista.

En la sección siguiente, nos referimos brevemente a la postura semanticista de Giere (1999) con relación a los modelos científicos, que se diferencia de la posición deductivista (Klimovsky, 1990) y de la instrumentalista (Morrison & Morgan, 1999).

## La posición semanticista

La noción de modelo ha sido analizada en epistemología tanto en la denominada concepción estándar representada por Carnap, Hempel y Popper, como por los representantes de la concepción no estándar como Kuhn, Lakatos, Laudan, Toulmin y Bachelard. Ambas tradiciones se interrogan sobre qué es una teoría científica y cuál es su relación con los modelos. Al introducir las reglas de correspondencia para resolver el salto que existe entre el nivel observacional, empírico de una teoría, y el de las leyes teóricas, conocido como el problema de los términos teóricos y observables, la concepción standard adopta una postura semántica de las teorías científicas (Cassini, 2011). Las reglas de correspondencia vinculan a las leyes empíricas con las teóricas, es decir que, asignan significado o interpretan los postulados de una teoría dada.

La concepción semanticista no es monolítica y admite diversas corrientes, que conforman una suerte de familia semanticista (Adúriz Bravo y Ariza, 2014). Los semanticistas han estudiado los usos y características de los modelos, su papel y lugar en las teorías científicas (Suppes, 1960; Achinstein, 1968; van Fraassen 1980, 1989), y también la función analógica, representacional y mediadora entre las teorías y el mundo que los modelos tienen (Hesse, 1953, 1961, 1966; Giere, 1988, 1999; Morrison, 1998; Morrison & Morgan 1999; Lombardi 2010).

La concepción semanticista de Ronald Giere (1999) ha tenido gran influencia en la Didáctica de las ciencias naturales (Adúriz Bravo y Ariza, 2014). Giere adhiere a la idea de que es posible generar una descripción única y útil, que permita dar cuenta de la heterogeneidad de la noción de modelo en física, en química, en biología, en economía, etc.

En la postura semanticista de Giere, los modelos son parte de las teorías científicas (Figura 2), lo cual diluye el problema de la consistencia.

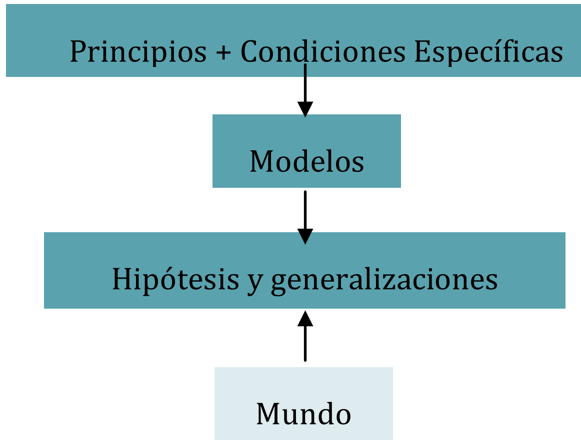



Figura 2. Representación de una Teoría Científica según Giere (1990)

Los modelos propios de las ciencias maduras como la física o la biología, se consideran como entidades abstractas, construidas a partir de principios generales apropiados y condiciones específicas (Giere,1999). Estas construcciones humanas surgen gracias a la capacidad de nuestra especie para crear sistemas de signos lingüísticos o no, como los matemáticos u otros. Para Giere (1999) existen múltiples formas de caracterizar un modelo abstracto, lo cual no significa que deban necesariamente identificarse ni con entidades lingüísticas, ni con ecuaciones. Tampoco debe considerarse que los modelos son meramente formales, porque son creados ya interpretados.

Por ejemplo, si se asume el principio de que la fuerza elástica es directamente proporcional a la longitud $F = -kx$ se obtiene el modelo abstracto del oscilador armónico, que puede aplicarse entre otros, a un sistema

masa-resorte ideal. Su caracterización matemática, permite calcular el período de oscilación en función de la masa del resorte $m$ y de la constante elástica del mismo $k$, $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$. Cuando se conocen los valores de estos parámetros para el sistema real, es posible establecer el ajuste entre el modelo y dicho sistema, midiendo el período y comparándolo con el valor que arroja el modelo. El uso de modelos para representar algo, incluye la evaluación de cuan razonable será el ajuste esperable. En el caso de que se requiera complejizar el modelo, por ejemplo, debido al amortiguamiento, se adoptará el modelo masa-resorte amortiguado y la descripción matemática correspondiente.

Los modelos en ciencias son herramientas de representación (Giere, 1999, 2004) que usan los científicos para aprender sobre algo y sobre cómo funciona. Su utilidad es representar el mundo, puesto que según Giere (1999, 2004), carece de sentido y está fuera del alcance de la ciencia, preguntarse cómo son “realmente” las cosas.

Por ejemplo, el modelo gravitacional que surge de los principios de la mecánica de Newton, fue formulado en términos de fuerzas “a distancia” que se propagan de manera instantánea. Esta idea, incomodaba al propio Newton, quien al igual que Galileo, tenía una concepción mecanicista del mundo, que pragmáticamente dejó de lado, para proponer la ley de gravitación. Con el transcurso de los años, el desarrollo de la noción de campo de fuerzas eliminó el problema de la propagación instantánea.

Para Giere (1999) no tiene sentido preguntarse si los campos realmente existen, ya que, en este caso, tanto los principios del campo gravitacional, como los de la mecánica de Newton son igualmente buenos, porque generan el mismo conjunto de modelos. Los principios no se pueden testear empíricamente de manera directa, solo

es posible probar, cuanto se ajustan al mundo los modelos particulares que incorporan dichos principios.

Por su parte, los epistemólogos semanticistas e instrumentalistas Morrison y Morgan (1999) analizan ¿cómo se construyen los modelos? ¿cómo funcionan? ¿qué representan? y ¿cómo se aprende con ellos? Según ellos, los modelos se construyen a partir de un conjunto de elementos de la realidad modelada y de la teoría; y de otros elementos externos, lo cual los torna relativamente independientes de la teoría y del mundo.

Con relación a su poder representacional, los modelos científicos solo se refieren a ciertos aspectos de aquello que representan. A veces, es necesario utilizar un conjunto de modelos, que pueden llegar a ser contradictorios entre sí, por ejemplo, para el núcleo del átomo, o para la luz.

En síntesis, para estos autores, los modelos no forman parte de las teorías, solo median entre una teoría y el mundo y además, mantienen cierta autonomía respecto de ambos. Así, en la producción del conocimiento, los modelos no estarían supeditados ni a las teorías ni a los datos, sino que, junto con los instrumentos de medida, los experimentos, las teorías y los datos, son uno de los ingredientes esenciales de la práctica de la ciencia (Morrison y Morgan, 1999: 37).

## La TAD y la modelización científica

Las investigaciones sobre el papel de la modelización científica en general y de la modelización matemática en la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas tienen un interés creciente.

En matemáticas, se han investigado: la construcción de herramientas específicas para analizar y evaluar las prácticas de modelado; las estrategias para la enseñanza y el aprendizaje del modelado matemático y la formación de los profesores en el modelado y sus aplicaciones (Carreira, Barquero, et al., 2019). Existen diversos enfoques teóricos y metodológicos sobre el modelado y su enseñanza, pero una preocupación común y recurrente se refiere a ¿cómo enseñar modelización matemática? y ¿cómo enseñar matemáticas a través de la modelización?

Sin embargo, no hay consensos sobre aspectos fundamentales tales cómo en qué consiste la modelización matemática, ni sobre la relación entre la actividad matemática y la actividad de modelización.

En el ámbito de la TAD, la modelización se entiende como parte de la actividad matemática (Chevallard, 1989; García et al., 2006). Las investigaciones sobre la viabilidad de los procesos de modelización en la universidad (Bolea, 2002; García et al., 2006; Barquero, 2009; Barquero, et al., 2011) consideran a los REI como dispositivos apropiados para desarrollar procesos de modelización en instituciones escolares (Chevallard 2015; Winsløw, et al., 2013).

En los primeros trabajos de Chevallard (1984, 1989, 1990) ya se propone una noción general de modelado matemático, no restringida al estudio matemático de sistemas no matemáticos, por ejemplo: sistemas físicos, biológicos, económicos, etc. La modelización matemática implicará tanto a los sistemas intramatemáticos como a los extramatemáticos.

Chevallard (1990) asume que, en todo proceso de modelización, existen básicamente dos entidades: un sistema a modelar, que puede ser matemático o no matemático, y un modelo (matemático) de dicho sistema. El proceso de modelado se despliega en tres fases genéricas:

1. Definir el sistema que se va a estudiar, especificando cuales serían los "aspectos" relevantes para el estudio del sistema que se quiere realizar, y el conjunto de variables que recortan el problema. Las variables se nombran con letras.

2. Elaborar el modelo, estableciendo una serie de relaciones, R, R´, R´´, etc., entre las variables consideradas en la primera fase.

3. El modelo así obtenido, es tratado matemáticamente con el fin de producir nuevos conocimientos sobre el sistema estudiado. Esta actividad matemática produce nuevas relaciones entre las variables del sistema.

La tercera fase es siempre una fase propiamente matemática, mientras que las anteriores se relacionan con el dominio del sistema. Chevallard (1989) propone diversos ejemplos de modelado de sistemas intramatemáticos y extramatemáticos. A continuación, desarrollamos el ejemplo del péndulo ideal en un campo gravitacional que él propone, aunque lo hacemos de manera diferente. Enunciamos el problema de la siguiente manera:

Suponiendo que el período de oscilación de un péndulo simple depende exclusivamente de la longitud del hilo, de la masa de la partícula y de la aceleración de la gravedad y que en la fórmula del período no intervienen más que el producto de las magnitudes indicadas, elevadas a exponentes diversos y ligadas por una constante, obtener la fórmula del período de oscilación de dicho péndulo.

Fase 1: El sistema físico a modelar es un péndulo, constituido por una masa puntual, suspendida de un hilo inextensible y de masa despreciable, que oscila en un campo gravitacional. Se desprecia la fuerza de roce en el punto de suspensión y también la de la masa oscilante con el aire. Debido al carácter puntual de esta última, no es necesario considerar posibles torques y en consecuencia el péndulo oscila en un plano. Supongamos que recurrimos a las técnicas del análisis dimensional, para construir un modelo matemático del sistema péndulo.

Fase 2: las variables del Sistema son:

$T$: *longitud del hilo*

$l$: *longitud del hilo*

$\theta$: *amplitud de la oscilación*

$T$: *períodode la oscilación*

$m$: *masa del péndulo*

$g$: *aceleración de la gravedad*

$k$: *es una constante adimensional*

Consideramos que el período de oscilación del péndulo está relacionado con las magnitudes antes mencionadas, aunque no sabemos exactamente cómo:

$T = kl^a m^b g^d \theta^d$ (1)

Considerando las dimensiones de cada magnitud:

$[T] = S,\ [m] = M,\ [g] = \frac{L}{S^2},\ [\theta] = G,\ [l] = L$

Fase 3: Se puede escribir dimensionalmente (1) como sigue:

$$[T] = [k][l]^a[m]^b[g]^d[\theta]^e$$

$$S = 1L^a M^b \left(\frac{L}{S^2}\right)^d G^e$$

$$S\, L^0\, M^0\, G^0 = 1L^{a+d}M^bS^{-2d}G^e$$

Entonces los valores de los exponentes son:

$$-2d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

$$a + d = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = 0$$

$$e = 0$$

Volviendo a (1) la fórmula del período es:

$$T = kl^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}$$

$$T = k\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A partir del trabajo en el modelo matemático y retornando al sistema de partida, se obtiene la fórmula del período. El período es independiente de la masa y de la amplitud, conocimientos que no se disponían al inicio.

El trabajo experimental en el sistema, si se sabe el valor de g en la latitud del lugar, permitiría establecer que $k \cong 2\pi$. Esto último, podría considerarse una cuarta fase de respuesta a nuevas preguntas (Gascón, 1994). Además, nuevas preguntas a partir del sistema original, junto con el modelo matemático, generarían un nuevo sistema que a su vez originaría un nuevo modelo, y así sucesivamente. Es decir que la relación entre sistema y modelo, es reversible y no absoluta.

A continuación, proponemos un sistema aparentemente extra-matemático, porque posee un contexto, pero en realidad esto es discutible:

"Como faltaban cuatro sándwiches, los partimos en tres partes nos comimos dos cada uno y sobraron cuatro. ¿Cuántos éramos y cuántos sándwiches había?"

Las variables del sistema con $p, s, k, n, b \in N$ son:

$p$: *número de personas*

$s$: *número de sandwiches*

$n$: *unidades de partición*

$k$: *diferencia entre personas y sandwhiches*

$r$: *partes que sobraron*

$b$: *partes consumidas por cada persona*

Si $k \neq r$ el modelo del sistema considerado es:

$p - s = k$ (2)

$n.s - b.p = r$ (3)

Las soluciones, siendo $n, b, r, k \in N$ son

$s = \left(\frac{r+bk}{n-b}\right)$(4)$p = \left(\frac{r+nk}{n-b}\right)$ (5) con $n > b$

$\frac{p}{s} = \left(\frac{r+nk}{r+bk}\right) \Rightarrow p = \left(\frac{r+nk}{r+bk}\right)$s (6)

En el caso particular cuando $n = 3, b = 2, k = 4, r = 4$, se obtiene que s=12 y p=16.

Operando con (3) y (5) y considerando como parámetros $n$ , $b$, $r$ podemos expresar $k$ en función de s:

$$k = \frac{s(n-b) - r}{b} \text{ (7) con } n, b, r, s \in N$$

Los valores de $k$ naturales se obtienen cuando el numerador es múltiplo de $b$. Es decir que no cualquier $k$ será posible para $n$, $b$, $r$ dados.

Si *k*=*r*, un modelo del sistema sería:

$p - s = k$ (8)

$n.s - b.p = k$ (9)

Cuyas soluciones son

$s = \frac{(b+1)}{n-b} k(10) p = \frac{(n+1)}{n-b} k$ (11) siendo $n > b$

Operando con (10) y (11) se obtiene una relación entre p y s:

$$\frac{p}{s} = \left(\frac{n+1}{b+1}\right), p = \left(\frac{n+1}{b+1}\right) \text{s}(12)$$

Si $k = 0 \Longrightarrow p = s \Longrightarrow \left(\frac{n+1}{b+1}\right) = 1 \Rightarrow n = b$, en este caso el sistema no estaría bien representado, ya que debe ser $n > b$. Entonces se cumple que:

$$k > 0 \Longrightarrow \ p > s \Longrightarrow \frac{p}{s} > 1 \Longrightarrow \left(\frac{n+1}{b+1}\right) > 1$$

En el caso cuando $n = 3, b = 2, k = 4$, se obtiene que s=12 y p=16.

El modelo nos permite analizar, ahora más sencillamente, para qué valores de los parámetros $n$ , $b$ existe solución.

Operando con (8) y (11) se obtiene k en función de s:

$$k = \left(\frac{n-b}{b+1}\right) s, \qquad n > b, \qquad n, b, s \ \in N$$

Esto significa que si $\left(\frac{n-b}{b+1}\right) \in N \Longrightarrow k \in N$. Es decir que para cualquier $k$ partiendo de $s = 1$ existirá una solución natural.

En cambio, si $\left(\frac{n-b}{b+1}\right)$ es un número fraccionario, los valores de $k$ serán naturales, solo si $s$ es múltiplo de $b + 1$. Es decir que no cualquier $k$ será posible para $n$ y $b$ dados.

En cualquiera de los casos considerados, los valores de $k$ admisibles son los términos de una sucesión aritmética de razón $k$, cuyo primer término es $k$.

En ambos ejemplos se muestra como el desarrollo de un modelo matemático del sistema, y el trabajo matemático en él, producen conocimientos que en el inicio no estaban disponibles. Esta forma de entender el modelado matemático, propia del paradigma de la investigación y del cuestionamiento, es ajena al paradigma tradicional de enseñanza.

Según la concepción heredada de la matemática "sabia", en el modelado matemático se dispone de una especie de "almacén de buenos modelos -más bien de sistemas axiomáticos-", entre los cuales se escoge el apropiado para "aplicar" a la realidad física, química económica, biológica, etc. Para la TAD, el modelado es un proceso reversible y relativo a los sistemas considerados, que produce conocimientos nuevos a partir de un sistema intra-matemático o no.

Ambas formas de entender la actividad de modelización, son ajenas a la mayoría de las instituciones escolares, desde la escuela primaria y secundaria hasta la universidad y la formación de profesores de matemática y ciencias. La ausencia de cualquier actividad de modelado, de interpretación de un modelo, de evaluación de sus alcances, limitaciones, poder representacional, y de análisis del conocimiento que produce o no, es un obstáculo de porte para la enseñanza por indagación. En las secciones siguientes, ponemos en evidencia los efectos de esta ausencia en una formación de los profesores compatible con las actitudes y los gestos didácticos propios del paradigma de enseñanza de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

# Capítulo 5

# LA FORMACION DE PROFESORES

## Los profesores en formación y los REI

En nuestras primeras investigaciones, nos preguntamos acerca de cómo introducir la enseñanza por investigación y cuestionamiento del mundo en la formación inicial de los profesores en la Universidad.

Los REI son el correlato natural del paradigma del cuestionamiento, pues sustituyen a una enseñanza basada en respuestas, que no responderían a ninguna pregunta; por el estudio de preguntas "fuertes", derivadas de una pregunta denominada generatriz. El estudio de una pregunta de ese tipo, requiere tanto de respuestas potenciales como de más de una disciplina para estudiar e investigar. En la investigación que vamos a reseñar, desarrollamos un REI genuinamente codisciplinar, que implementamos en cursos de profesores en formación en la Universidad.

El REI inicia con la pregunta $Q_0$: ¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? Las respuestas posibles son diversas y se originan en la cultura local. Según publicaciones aparecidas en un diario muy importante a poco de la caída, esta podría explicarse a partir del fenómeno de resonancia mecánica. También es posible encontrar otras explicaciones culturales más o menos mágicas, geográficas, sociológicas e incluso políticas, pero la de la resonancia mecánica, es la hipótesis científicamente tratable. Así, en el REI propuesto, es necesario estudiar conjuntamente, al menos la física y la matemática ligada al problema.

El recorrido fue desarrollado por cuatro investigadores: uno con formación en física y matemática, dos sólo en matemática; y un físico. La conformación del equipo obedece a la codisciplinariedad y a la complejidad de la pregunta generatriz propuesta. Inicialmente este equipo de investigación "vivió" el REI en la posición de estudio e investigación de la cuestión, analizando las respuestas

disponibles, y en función de ello, elaborando respuestas posibles, independientemente del nivel escolar donde se pudiera implementar el REI (Otero et al., 2015; Gazzola et al., 2015, 2020; Llanos et al., 2019). Luego, en una segunda instancia, el equipo pensó en la enseñanza a partir del REI.

Se realizaron dos implementaciones en una universidad pública, de las cuales participaron 25 estudiantes del último año del profesorado en matemática (12 en el primer año y 13 en el segundo). Las edades de los estudiantes oscilan entre los 21 y 33 años. Las clases se realizaron en la Biblioteca de la Universidad durante 10 semanas, totalizando 7 horas semanales, distribuidas en dos encuentros.

Los resultados obtenidos en la primera implementación permitieron identificar que la principal dificultad de los estudiantes del profesorado universitario, se relaciona con el modelado y con el análisis del problema que dicha actividad permite realizar. En consecuencia, en la segunda implementación, se decidió que los estudiantes realizaran previamente, actividades de modelización más básicas.

## Modelo praxeológico de referencia

El modelo praxeológico de referencia [MPR] (Chevallard, 2013) es una reconstrucción de todos los saberes involucrados en el problema, realizada por los investigadores. El MPR es dinámico y flexible, se desarrolla y se readapta permanentemente.

La pregunta a estudiar es $Q_0$: “¿Por qué se cayó la piedra movediza [PM] de Tandil?”. La PM era una “roca oscilante” de granito de 248 toneladas, ubicada al borde de un cerro a 300 m sobre el nivel del mar en la ciudad de Tandil, Argentina (Figura 3).

Su principal atractivo, era que, oscilaba cuando se realizaba un torque externo en un lugar apropiado y con una frecuencia justa, o frecuencia propia del sistema PM

(Holmberg, 1912). El 29 de febrero de 1912, esta piedra enorme cayó al precipicio. Por más de 100 años se generaron diversas conjeturas, mitos y leyendas. La figura 4 muestra el cerro después de la caída. La cruz indica el lugar donde se encontraba apoyada la PM.

Si la PM se considera como un sistema oscilante, el estudio se orienta hacia las oscilaciones mecánicas. Se comienza por modelos relativamente simples como el resorte o el péndulo ideal, donde las oscilaciones se deben a la fuerza de restauración que, para oscilaciones de pequeña amplitud, depende linealmente de la distancia a la posición de equilibrio.



Figura 3. Fotografía obtenida del Archivo General de la Nación Argentina

Este modelo se conoce como *oscilador armónico simple*, cuyo movimiento se describe planteando las ecuaciones de Newton, por medio de una ecuación diferencial lineal de segundo orden y la solución es una familia de funciones armónicas.

Si se considera el rozamiento, hay que añadir a la ecuación diferencial un término de amortiguamiento, que incluye a la velocidad —derivada primera de la posición respecto al tiempo—. También es posible estudiar sistemas forzados que, además de ser amortiguados, están bajo la influencia de una fuerza externa.



Figura 4. Fotografía posterior a la caída, obtenida del Archivo General de la Nación Argentina.

En el caso de que la fuerza externa sea periódica y su frecuencia sea aproximadamente igual a la frecuencia natural —libre de fuerzas externas— del sistema oscilante, se produce un máximo en la amplitud de oscilación, lo que genera el fenómeno conocido como resonancia mecánica.

Si se considera el sistema oscilante de un cuerpo giratorio suspendido, en lugar de una masa puntual, es preciso estudiar el torque y el momento de inercia de un cuerpo oscilante. Aquí, nuevamente el sistema es lineal para oscilaciones de pequeña amplitud. También se pueden considerar los casos amortiguados y forzados, que

corresponden al mismo modelo matemático, pero los parámetros tienen una interpretación física diferente.

Este modelo, llamado péndulo físico, no es adecuado para tratar el sistema de la PM, porque el cuerpo oscila suspendido y la PM lo hacía apoyada. Esto conduce a incursionar en la mecánica de los sólidos rígidos oscilantes y apoyados. Así, se puede adoptar un modelo tipo "mecedora" en el que la base de la PM es curva y se encuentra sobre una superficie plana. En este caso, la oscilación —amortiguada y forzada— está relacionada con un movimiento de roto-traslación (Otero et al.,2017). La aplicación de las leyes de Newton a este modelo, conduce a una ecuación diferencial donde los parámetros son específicos de la PM, que viene dada por la siguiente ecuación:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + w_0 = \left(\frac{M}{I}\right)\cos{(wt)} \quad (1)$$

La solución estacionaria de esta ecuación es:

$$\varphi(t) = \varphi_M \cos{(wt - \psi)},$$

donde $\varphi_M$ es la amplitud y $\psi$ la fase.

$$\varphi_M = \frac{M_0/I}{\sqrt{(w_0^2 - w_0) + w_0^2\gamma^2}} \text{ and } \psi = tg^{-1}\left(\frac{\gamma w}{w_0^2 - w^2}\right) \ (2)$$

El máximo de $\varphi_M$ ocurre para:

$$w_M = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}.$$

Llegados a este punto, se deben estimar los parámetros siguientes: el torque externo $M_0$, el momento de inercia I, la frecuencia natural de oscilación del sistema $w_0$ y el coeficiente de amortiguamiento γ. Los detalles sobre la forma, las dimensiones y posición del centro de masas de la piedra movediza, pueden consultarse en Peralta et al. (2008). Con esos datos, se estiman algunos parámetros de nuestro modelo: la masa, el momento de inercia y la

distancia de 7,1 m del centro de masa, donde hasta cinco personas que ejercieran el torque externo, hacían oscilar a la piedra.

Utilizando dichos valores, se estudia el comportamiento de la función amplitud $\varphi_M\ (w)$ en un rango de frecuencias entre 0,7 Hz y 1 Hz, que son las reconocidas históricamente como las frecuencias de oscilación natural de la piedra según Rojas (1912) y se calcula para cada caso, la amplitud máxima $\varphi_M\ (w_M)$.

La piedra caería si

$$\varphi_c \leq \varphi_M(w),$$

siendo

$$\varphi_M(w_M) = \frac{M_0}{w_0 I \gamma}$$

Si como en este caso, se estima que γ es muy pequeño y despreciable, entonces $w_M\ \approx w_0$. La condición de caída es:

$$\varphi_c \leq \frac{M_0}{w_0 I \gamma}.$$

El valor puede determinarse realizando un análisis de estabilidad elemental, a partir de las dimensiones de la base de la piedra y la posición del centro de masa, lo cual arroja un valor de 6° (Otero et al., 2017). En este modelo, γ es un parámetro libre, cuyo orden de magnitud estimamos en $\gamma \geq 10^{-2}$. De este modo, existen diferentes pares dentro del intervalo de frecuencias mencionado, que soportan la superación del ángulo crítico, es decir, la predicción de la caída.

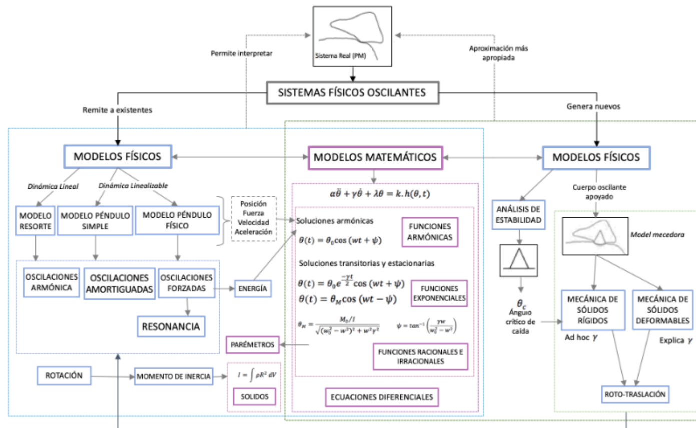



Figura 5. Esquema del MPR del REI (Gazzola et al. 2020)

Para obtener una mejor aproximación del amortiguamiento en el modelo físico -que claramente no se debe al aire- se analiza un modelo más sofisticado de la piedra, considerándola como un sólido deformable, donde el contacto en la base de apoyo, que consideramos una superficie plana, no es un punto. Es decir, es una extensión finita, sobre la que se distribuye la fuerza normal, que es más grande en la dirección del movimiento y genera una resistencia a la rodadura, que se manifiesta a través de un par contrario al movimiento. La resistencia a la rodadura depende de la velocidad de la piedra. Esto permite interpretar físicamente el término de amortiguamiento. Por lo tanto, la física subyacente al amortiguamiento, es la misma que hace que una rueda de neumático que rueda horizontalmente en la carretera se detenga. No obstante, en el caso de la piedra, la deformación es mucho más pequeña.

Aunque el modelo de “mecedora deformable” tiene parámetros adicionales libres, los valores tabulados del coeficiente de resistencia a la rodadura para piedra sobre piedra -disponibles en la literatura especializada- permiten

estimar y justificar los valores que incorporamos "ad hoc" en el modelo rígido.

## Resultados obtenidos al implementar el REI

Los estudiantes comienzan el estudio de la pregunta generatriz, analizando las conjeturas sobre la caída. Es decir, encuentran las respuestas etiquetadas R◊ disponibles en la cultura: la caída debida a explosivos, a raíz de una huelga de picapedreros; la caída por efecto de la erosión; los mitos y leyendas populares, y la conjetura del naturalista Holmberg, quien atribuye la caída a la resonancia mecánica. Los estudiantes adoptan esta última hipótesis.

El estudio de las respuestas existentes, genera nuevas preguntas del tipo: ¿Qué morfología tenía la piedra? ¿Qué es una oscilación y qué tipos hay? ¿Qué ecuaciones describen el movimiento? ¿Cuáles son las soluciones? ¿Cuál modelo físico conocido es compatible con la Piedra Movediza? ¿Cuál es el modelo matemático? Las respuestas a las mismas, fueron consideradas en ambas implementaciones, pero en este nivel, se identifican diferencias entre un año y el siguiente.

En la primera implementación los futuros profesores buscaban un modelo físico y matemático "listo para usar", para responder a la pregunta inicialmente planteada. Esperaban que el modelo permitiera responder, por ejemplo: ¿a qué hora cayó la piedra? ¿cuántas veces la empujaron hasta que se cayó? Esto revela sus dificultades sobre qué les puede ofrecer un modelo matemático del sistema y qué no.

Con relación al estudio de las oscilaciones, los estudiantes buscaron un modelo físico "hecho", aplicable a la situación real. Así, adoptaron los modelos disponibles en los libros de física y en la web, sin considerar si representaban apropiadamente al sistema piedra. A partir

de los libros, adoptaron el modelo del péndulo físico, claramente inadecuado, porque la piedra es un cuerpo apoyado. En simultáneo con la implementación, los estudiantes realizaban el curso de Ecuaciones Diferenciales, conforme a su plan de estudios, y la matemática no parecería ser una dificultad para ellos.

El péndulo físico, genera preguntas sobre ¿qué es y cuál es el momento de inercia? ¿cómo calcular el momento de inercia de un sólido irregular? ¿qué sólido regular es una buena aproximación de la Piedra Movediza para obtener la inercia? Así, el intento por calcular la inercia los lleva a considerar a la piedra como un cono regular.

Los estudiantes, desconsideraron la solución de la ecuación diferencial para un sistema oscilante amortiguado y forzado, que está en los libros de física, e intentaron resolver la ecuación por sí mismos. Esto generó dificultades tanto para arribar a la solución matemática, como para interpretarla en términos del sistema. Se evidencia así, que los profesores en formación querían verificar la solución y que desconocían la utilidad fundamental de un modelo matemático: el conocimiento nuevo que puede obtenerse con él.

En la segunda implementación, se introdujeron modificaciones al REI. A diferencia del año anterior, cuando los modelos de péndulo y de resorte surgieron, se generaron y analizaron todos los casos posibles. Las primeras respuestas R◊ estudiadas por los futuros profesores se relacionaron con el MAS. Un grupo se dedicó a los sistemas: péndulo simple, resortes, y péndulo físico, y el otro, estudió el modelo del resorte ideal, amortiguado y forzado. Así, los PF concluyeron que un mismo modelo matemático, representaba nueve sistemas físicos diferentes. Se dedicó un tiempo considerable al análisis de las diferencias y las similitudes entre los modelos físicos y

matemáticos y a la relación con el sistema PM. La Figura 6, muestra los modelos considerados.

| MOVIMIENTO / MODELO | MAS (Movimiento Armónico Simple) | Movimiento Amortiguado | Movimiento Forzado | |
|---|---|---|---|---|
| | Ecuación | Ecuación | Ecuación | |
| RESORTE | $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ | $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $\gamma$; $\omega^2 = \omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2$ | $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F\cos(\omega_f t)}{m}$; $\gamma$; $tg\phi = \gamma\omega/(\omega^2-\omega_0^2)$ | |
| | Solución: $x(t) = \alpha\cos(\omega t+\alpha)$ | Solución: $x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\phi)$ | Solución: $x(T) = A\cos(\omega_f t+\phi)$; $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$ | Analisis de Resonancia |
| PÉNDULO SIMPLE | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$ con $\gamma = \frac{b}{m}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}$ | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = \frac{F}{m\ell}\cos(\omega t)$; $\theta_m = \frac{F_0/m\ell}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2-\omega^2\gamma^2}}$; $tg\phi = \frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$ | |
| | Solución: $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t+\phi)$ | Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\phi)$ | Solución: $\theta(t) = \theta_M\cos(\omega t+\phi)$ | Análisis de Resonancia |
| PÉNDULO FÍSICO | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$ con $\gamma = \frac{b}{I}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2-(\gamma/2)^2}$ | $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = \frac{F}{I}\cos(\omega t)$; $\theta_M = \frac{F_0/I}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)-\omega^2\gamma^2}}$; $tg\phi = \frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$ | |
| | Solución: $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t+\phi)$ | Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\phi)$ | Solución: $\theta(t) = \theta_M\cos(\omega t+\phi)$ | Análisis de Resonancia |

FIGURA 6. (Llanos et al., 2019, p.71)

En esta implementación, los profesores usaron la solución de la ecuación diferencial que aparece en los libros de física, en lugar de resolverla como habían hecho los estudiantes del año anterior. Además, algunos alumnos cuestionaron fuertemente que el péndulo físico sirviera como modelo del sistema piedra, porque un cuerpo apoyado no puede considerarse como un péndulo físico “invertido”.

Al preguntarse ¿cuál modelo es útil para modelar la Piedra Movediza?, los estudiantes regresaron al sistema PM y se enfocaron en la base de apoyo. Por primera vez, ellos toman conciencia de que los modelos físicos y matemáticos se construyen y que, las respuestas de los libros colaboran para entender el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes, pero no son “a medida”. En esta instancia, los investigadores propusieron un sólido rígido en roto-traslación, que remite al mismo modelo matemático analizado previamente por los estudiantes.

Luego, se calcularon y estimaron los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, y se intentó explicar, a partir del modelo, la caída de la piedra. El momento de inercia, se obtuvo de un artículo publicado por los ingenieros responsables de construir la réplica de la Piedra Movediza (Peralta et. al, 2008) hoy puesta en el cerro.

De este modo, se concluyó que es factible, que un grupo reducido de personas hubiera causado que la piedra oscilara en condición de resonancia, fenómeno que explicaría su caída. Esto soporta con herramientas de física y matemática, la conjetura de Holmberg publicada en 1912, aunque no fundamentada. El cálculo y estimación de los parámetros permite establecer sus posibles valores en la solución de la ecuación diferencial, compatibles con el hecho de la caída.

En síntesis, las dos implementaciones difieren en el tratamiento de los modelos. En la primera, los estudiantes ni siquiera cuestionaron que el péndulo físico no resultaba apropiado para describir el sistema. En la segunda, los estudiantes discuten este problema y aceptan la propuesta de los investigadores: un modelo más ajustado al sistema piedra, aunque aún incompleto (los investigadores desarrollaron otro modelo físicamente más complejo).

Las diferencias se relacionan con las decisiones didácticas adoptadas y con el espacio ocupado por los actores. En la primera implementación los estudiantes estudian las respuestas disponibles en la cultura institucional. Principalmente se enfocan en resolver la ecuación diferencial del sistema del péndulo físico. Esto produjo dificultades matemáticas y físicas.

El problema identificado es la concepción del modelado matemático vigente en la universidad, entendido como aplicación, en este caso de ecuaciones diferenciales, que tienen solución y están “siempre” disponibles. Además, los profesores no comprenden ni conocen la utilidad del

modelo matemático, ni el papel de los parámetros, a los que consideran fijos e inamovibles.

En la segunda implementación, se dedicaron ocho sesiones al desarrollo de dos REI intramatemáticos (Chappaz y Michon, 2003; Ruiz, et al., 2007), que los futuros profesores transitaron en la posición de estudiantes, y no de enseñantes. Se buscó enfatizar el papel de la modelización y mediante dispositivos como planillas de cálculo y graficadores, se analizaron las familias de funciones con los diversos parámetros del sistema piedra. Este tipo de tareas, nunca habían sido realizadas por los estudiantes hasta ese momento.

## Algunas reflexiones

El trabajo realizado con los profesores en formación en la universidad, les permitió vivenciar por primera vez en su vida, una enseñanza por investigación a partir de un REI genuinamente codisciplinar, estudiando conjuntamente desde el inicio, física y matemática.

A pesar de la formación matemática fuerte que reciben los estudiantes de la universidad, el principal problema reside, en que no la conciben de manera útil ni funcional. Vivir un REI, les permite a los futuros profesores, apenas asomarse al problema de cómo transcurre una enseñanza basada en preguntas en una clase "normal", con este dispositivo.

Sin embargo, esta posibilidad es completamente insuficiente para permitirles realizar enseñanza por investigación en la escuela media. Es importante tener en cuenta que ellos realizan el REI en posición de estudiantes universitarios y no de enseñantes.

El trabajo permite anticipar las dificultades que entraña diseñar un REI genuinamente codisciplinar, pues se requiere un equipo de investigadores en posición de

didactas. Es decir que esto sería difícilmente realizable por profesores con poca o ninguna experiencia.

La ideología anti cuestionamiento que es dominante en las instituciones escolares de todos los niveles, desalienta, e incluso elimina todo intento de cuestionar al saber matemático o no, su utilidad y las razones de ser de su enseñanza. En consecuencia, "vivir" un REI, es importante, pero resulta "descolocado" y tardío en el momento de formación en que estos casi profesores, se encuentran.

Parece más viable entonces, preguntarse por la posibilidad de introducir solo algunos gestos germinales de cuestionamiento, al menos, en posibles organizaciones de la enseñanza, que estos profesores deben diseñar, para iniciarse en el ejercicio de su profesión en la escuela secundaria. Esto nos llevó a considerar también, el problema de la formación de los profesores en ejercicio, que numéricamente es una población mucho mayor y cuya preparación para enseñar cuestionando al mundo es escasa y se vuelve indispensable.

# Los profesores en servicio y el paradigma del cuestionamiento

La investigación acerca de la formación de profesores de Matemática viene realizándose desde hace más de treinta años (Bishop et al., 2003; English et al.,2002; Llinares & Krainer, 2006; Hill et al., 2007; Franke et al., 2007; Sowder, 2007). Autores como Shulman (1987) han sostenido que, enseñar, requiere conocimientos específicos tales como: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y el conocimiento curricular.

La noción de *"conocimiento matemático para la enseñanza"* (MKT) (Ball, 2000; Ball et al., 2001, 2005, 2008; Hill et al., 2004, 2008) se refiere a *"el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para realizar la instrucción y el desarrollo en el alumno"* (Hill et al., 2008, p. 374).

EL MKT está integrado por el conocimiento común del contenido (CCK) y el conocimiento pedagógico del contenido. El CCK es *"aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas"* (Hill et al., 2008, p. 377).

El conocimiento especializado del contenido (SCK) es el conjunto de *"conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza"* (Ball et al., 2008, p. 400), tales como: *"representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema"* (Hill et al., 2008, p. 377-378).

Otros enfoques, coinciden en que la formación de los profesores exige amplio domino del campo matemático, y

una formación didáctica acorde a las exigencias institucionales y a la formación de los estudiantes como ciudadanos de hoy (Artaud et al., 2011; Cardeñoso et al., 2001; Fennema & Loef, 1992; Giménez-Rodriguez et al., 2009; Rico, 2004; Robert & Pouyanne, 2005; Rojas & Deulofeu, 2015).

La noción de praxeología, es útil para abordar el problema de la formación del profesor de matemática, atendiendo a la dimensión antropológica, epistémica y didáctica. Reconocer la existencia de un paradigma de enseñanza dominante como el de la visita a las obras y la necesidad de sustituirlo por uno nuevo, basado en la investigación y el cuestionamiento del mundo, afecta considerablemente a la profesión de profesor.

Así surgen nuevos interrogantes: ¿qué praxeologías matemáticas y didácticas necesitan los profesores en servicio para enseñar en el nuevo paradigma? ¿cómo y dónde obtendrán dicho equipamiento? ¿cómo formar a los futuros profesores? ¿cómo se cambia la ideología anti cuestionamiento originada en los niveles superiores de la escala de codeterminación didáctica, por otra que promueva el cuestionamiento?

Es claro que los profesores no tienen disponible el equipamiento que requiere el nuevo paradigma, y que la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas y de las ciencias tiene que desarrollarlo o aspira a hacerlo. ¿Cómo sucedería la transición de los profesores formados en el viejo paradigma y el paradigma emergente? ¿Sería una conversión o una evolución? habida cuenta de que los cambios de paradigma (Kuhn, 1983) son revolucionarios, aunque ya hemos aclarado que el término debe entenderse de manera muy general y no estrictamente epistemológica.

A continuación, presentamos sintéticamente varias investigaciones realizadas por nuestro equipo de trabajo,

dirigidas a poner a disposición de los profesores en servicio, algunas nociones básicas de la TAD y a intentar propiciar una enseñanza basada en al menos, ciertos gestos didácticos del paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

## Profesores en servicio que estudian la TAD

En un curso de Didáctica de la Matemática en la Universidad, donde se estudian los fundamentos de la TAD (Otero & Llanos, 2019, 2021; Otero et al., 2018) se realizó una investigación, cuyo objetivo es describir, analizar y comprender las potencialidades y las dificultades de los profesores cuando intentan enseñar estudiando preguntas, lo cual requeriría realizar ciertos gestos didácticos propios del paradigma de la investigación y del cuestionamiento. Interesa describir cómo ellos fabrican el medio didáctico en dos posiciones institucionales diferentes: la de estudiar por y para sí mismos una pregunta que potencialmente podría engendrar un REI, y cuando, en posición de profesor, tienen que organizar la enseñanza, a partir de esa cuestión. Además, también nos preguntamos por las transformaciones que estos profesores realizaban en M, en ambas posiciones institucionales.

Se propusieron tres tareas: la primera consistía en estudiar la pregunta de manera individual y elaborar una respuesta escrita, la segunda, solicitaba elaborar una respuesta escrita en grupos y la tercera, que esos grupos propusieran la organización de una posible enseñanza adaptada a una institución específica a partir de la pregunta estudiada.

La pregunta generatriz $Q_0$: ¿Cómo funciona una antena parabólica? se refiere a la construcción de las tangentes a una curva en geometría analítica. El objetivo es introducir el cálculo de tasas de crecimiento, que conducen a la noción de derivada. Elaborar una respuesta a $Q_0$ conduce a

reencontrar propiedades de la geometría sintética y analítica, de la óptica geométrica y ondulatoria. Se requiere estudiar la reflexión de las ondas electromagnéticas en diferentes superficies, para explicar el funcionamiento de diversos equipos de transmisión y de recepción de la luz, esenciales para las comunicaciones actuales; y para otros usos en el dominio de la arquitectura, de los automóviles, de la energía solar, etc.

Según los autores del REI (Bellenoué et al., 2014, p.47), la tareas matemáticas involucradas son: determinar la ecuación de una circunferencia a partir de sus elementos característicos; determinar la ecuación de una recta; la posición relativa de dos rectas; la forma canónica de un trinomio de segundo grado; resolver una ecuación de segundo grado; determinar algebraicamente las coordenadas de los puntos de intersección de dos curvas; demostrar que una recta dada es tangente a una circunferencia, a una parábola, a una hipérbola.

Es importante destacar que, nuestra pregunta didáctica se refiere a las transformaciones que los profesores introducen en el medio de estudio, cuando pasan de la posición de estudiante que se enseña a sí mismo, a la posición de profesor, que hipotéticamente organiza una enseñanza con esa pregunta.

Estos profesores están estudiando la TAD en la universidad, y si bien, la tarea que enfrentan es muy diferente de las que habitualmente realizan, no se busca en esta instancia, modificar la enseñanza en la institución en la cual trabajan. Cabe destacar que en la formación habitual de los profesores y en las capacitaciones que realizan, no se estudian preguntas, y menos aún, aquellas que involucran fuertemente a otra ciencia aparte de las matemáticas.

La Figura 7, muestra de manera muy sintética las praxeologías que, en este caso, esperábamos que los profesores estudiaran.

$Q_0$: ¿Cuál es la razón por la que se utiliza un paraboloide para una antena?
$Q_1$:¿Cómo funcionan y para qué sirven las antenas?
$Q_2$: ¿Por qué se usa un paraboloide y no otra superficie cuadrática?
OF: LUZ
**REFLEXION**, REFRACCION, INTERFERENCIA, DIFRACCION
$Q_3$ ¿Cuál es el modelo más apropiado?
Modelo de la Óptica Ondulatoria
Modelo de la Óptica Geométrica
OM: Cuádricas
OM: Paraboloides
$Q_4$ ¿Por qué es suficiente estudiar las trazas de la superficie cuadrática?
OM: Cónicas
Parábolas, Elipses, Hipérbolas
Circunferencias
$Q_5$: ¿Cómo se produce la REFLEXION de la LUZ en superficies con secciones parabólicas, elípticas, hiperbólicas, circulares?
$Q_6$: ¿Cómo se determinan la tangente y la normal a una parábola, elipse, circunferencia, hipérbola?
OF: reflexión de Rayos
**Ley de Snell-Descartes**
OM: Tangente a una Cónica
$R^{\heartsuit}$

Figura 7: Síntesis del MPR relativo a $Q_0$.

Históricamente, el problema de la reflexión de la luz en diferentes superficies cuadráticas, condujo al estudio de las cuádricas, de las cónicas como trazas de dichas superficies y de las tangentes a esas curvas. Es posible realizar y/o analizar experimentos sobre la reflexión en diferentes superficies cuadráticas tales como espejos cilíndricos, parabólicos o hiperbólicos.

La cuestión generatriz $Q_0$ dirige el estudio hacia praxeologías matemáticas relacionadas con el diseño curricular de la escuela secundaria argentina.

## La investigación, preguntas y resultados

El trabajo involucró a 31 profesores de matemáticas en servicio, que cursaban el segundo año de la Licenciatura en Educación Matemática (LEM) en una universidad pública argentina, en la modalidad on-line. En el curso, se estudian los fundamentos de la TAD y se analizan REI ampliamente difundidos que se encuentran disponibles en la literatura. En varias ocasiones, los profesores-estudiantes expresaron

sus reparos a la posibilidad concreta de realizar un REI: *"no parece posible que los REI funcionen en aulas reales"*; *"para nosotros sería imposible desarrollar algo como un REI"*; *"no sería posible cumplir el programa"*; *"esto es mucho más que resolver problemas"*; *"¿qué papel juegan las praxeologías?"*, *"¿cómo intervienen los contenidos matemáticos del programa?"* etc.

El último mes del curso se dedicó a estudiar una pregunta $Q_0$ que potencialmente podría originar un REI. Los estudiantes conformaron seis grupos para desarrollar las siguientes tareas:

T1: Estudiar $Q_0$ y elaborar una posible respuesta individual por escrito.

T2: A partir de las respuestas personales, producir por escrito una posible respuesta grupal a $Q_0$.

T3: Proponer en cada grupo una posible organización de la enseñanza adaptando T1 y T2 a una Institución determinada y presentar la tarea por escrito.

Las respuestas escritas de los grupos de profesores para las tareas T2 y T3, se analizaron utilizando los elementos del esquema herbartiano ampliado. Se buscó identificar, describir y comprender las dificultades y los obstáculos más relevantes que los profesores enfrentan cuando estudian $Q_0$ con la intención hipotética de organizar una enseñanza acorde con el paradigma de la investigación y el cuestionamiento. En un segundo momento de análisis, se emplearon métodos estadísticos lexicométricos (Lebart Morineau y Fenelon, 1985; Moscoloni, 2011) para triangular los resultados obtenidos.

Las preguntas que nos formulamos fueron las siguientes:

¿Cómo se construye y transforma el medio didáctico M entre el estudio de $Q_0$ y la propuesta de organización de la enseñanza a partir de dicha pregunta?

¿Cuáles son las principales dificultades que enfrentan los profesores para organizar una enseñanza que se aparte del paradigma monumental?

Los resultados muestran que los profesores tienden a formular preguntas de tipo esencial ¿qué es? Este tipo de preguntas, revelan la epistemología del paradigma monumental, tanto porque sólo admiten respuestas cerradas y definiciones, como por el hecho de que la ciencia no indaga sobre lo que las cosas realmente son, porque esta es una cuestión más metafísica que científica.

La mayoría de los grupos y de los profesores, parecen estar en principio, relativamente equipados para estudiar la pregunta, con relación al conocimiento matemático del que disponen para abordarla. Sin embargo, no cuestionan el saber a estudiar, ni el propuesto para enseñar. Es decir que, la organización de una enseñanza por investigación, que integre ciertos gestos de cuestionamiento, parece resultar más obstaculizada por cómo se trata el saber y con qué porción del saber enseñado se lo vincula, que por las dificultades matemáticas.

En la tarea dos, que requiere elaborar una respuesta con otros profesores, se genera una diferencia importante entre los grupos, según estos formulen primero preguntas relacionadas con física o con matemática. En el primer caso, se exploran diferentes áreas y obras de física, y después surgen las preguntas matemáticas. Mientras que cuando los profesores comienzan por preguntas matemáticas, ellos parecen asumir que primero, es necesario encontrar la matemática que vinculan con el problema, para recién entonces, proponer preguntas y posibles respuestas.

Esta decisión sobre qué saber encontrar primero, se conserva en la tarea tres, orientada a la enseñanza, e incide además en su organización, generando una propuesta didáctica de corte monumental y aplicacionista.

El monumentalismo se reinventa, bajo ciertas formas de empirismo: así, un grupo cambió la pregunta generatriz por ¿Cómo construir una cocina solar? Sin embargo, a este hecho que podría considerarse auspicioso, los profesores le asignaban la finalidad de producir un encuentro de los estudiantes “más sencillo y amigable con el saber”. En efecto, se proponía fabricar la “cocina” con cartón y se construían parábolas usando cuatro técnicas manuales diferentes, sin relación ni cuestionamiento.

En los grupos que iniciaron con la matemática, el monumentalismo también se evidencia en que los profesores se consideran plenamente responsables por la construcción y el control del medio didáctico. En consecuencia, en el paso de la tarea dos a la tres, cuando tienen que decidir cómo y qué enseñar, ellos eliminan numerosas preguntas y las reemplazan por tareas que generan un encuentro monumental. Por ejemplo: “Observa todos estos paraboloides: Podrías decir ¿cuáles tienen parábolas como trazas?”

Al analizar la difusión o comunicación de la respuesta elaborada, encontramos que esta puede ser de dos tipos: epistémica o narrativa. Difundir apropiadamente una respuesta, es un tipo de actividad científica ajena al paradigma monumental de enseñanza. Si bien los profesores la consideran levemente en la tarea dos, desaparece cuando se enfocan en la escuela. Esto indicaría que, cuando tienen que organizar la enseñanza, a los profesores les resulta muy difícil evitar el monumentalismo, como el saber es estático e incuestionable, la respuesta no requiere más validación ni discusión.

Entre los grupos que comienzan con preguntas de Física, uno de ellos opta justificadamente por la óptica geométrica y decide estudiar las parábolas en el marco sintético. Por lo tanto, es el único grupo que se pregunta por la existencia de la tangente a la curva en un punto, para tratar matemáticamente el problema de la reflexión de los rayos incidentes. Ellos desarrollan una forma coherente con el marco sintético para tratar este asunto. El análisis-síntesis praxeológico resulta una actividad didáctico-matemática esencial, ajena a las tareas habituales de los profesores. Sin embargo, al pasar a una posición de enseñante, en la tarea tres, también reducen las preguntas y optan por una versión mucho más guiada.

Con excepción de este único grupo, los restantes, terminan reduciendo la organización de la enseñanza a las parábolas, porque es un "tema" del currículum, aun cuando se esté planteando la organización de una enseñanza hipotética, como ha sido el caso.

## Familiaridad e incertidumbre

Al comenzar nuestra indagación pensábamos que frente a la tarea de proponer una organización hipotética de la enseñanza, propiciando gestos didácticos de cuestionamiento, uno de los principales obstáculos que los profesores tienen que afrontar es la incertidumbre que genera perder el control absoluto del medio didáctico. Esto les impide ir más allá de una organización de la enseñanza enmarcada en la visita de las obras, elegidas por ellos de antemano, lo cual prácticamente elimina la investigación y el cuestionamiento, que requieren fabricar un medio didáctico abierto.

En la tarea tres, la mayoría de los grupos propuso el primer encuentro con la matemática, en correspondencia con una concepción tradicional de la enseñanza.

Esto nos condujo a pensar que la pregunta generatriz sobre el funcionamiento de las antenas parabólicas, era percibida por los profesores en posición de enseñantes, como demasiado "riesgosa". Suponíamos por entonces, que quizás, el estudio de una cuestión intramatemática y, además, que ellos percibieran desde el comienzo, como más relacionada con las praxeologías matemáticas del currículum, podría generarles mayor seguridad y permitirles organizar la enseñanza conforme a algunos gestos del paradigma del cuestionamiento.

A continuación, describimos una segunda investigación, realizada con dos cohortes de profesores en servicio, en condiciones similares, pero modificando la pregunta generatriz a estudiar y algunas de las tareas propuestas.

## Una pregunta generatriz ¿más familiar?

Esta nueva investigación se desarrolló en dos cohortes posteriores de un curso universitario de didáctica de la matemática con 62 profesores de matemáticas en servicio. El curso es parte de la carrera universitaria Licenciatura en Educación Matemática (LEM). Los profesores que intervienen en la investigación, trabajan en diversas regiones y provincias del país y poseen diferentes trayectorias de formación, en instituciones terciarias no universitarias. Si bien la mayoría se desempeña en la enseñanza secundaria, su experiencia profesional es disímil y oscila entre 2 a 36 años (Otero, 2020; Otero et al., 2013, 2014, 2018; Otero, Llanos, 2019).

En el último mes del curso, se propuso a los profesores estudiar una cuestión generatriz, y luego, organizar a partir de ella, una enseñanza hipotética, involucrando algunos gestos didácticos del paradigma del cuestionamiento. Tanto en la investigación reseñada antes,

como en esta, el objetivo nunca fue que los profesores desarrollaran un REI.

En esta ocasión, la pregunta generatriz se relaciona con el problema denominado "La boîte du pâtissier” de Chappaz y Michon (2003). Las dificultades de los profesores en la posición de estudiantes, observadas en las investigaciones previas, nos llevaron a modificar algunas tareas. Debido a esto decidimos “corregir” cada entrega escrita, realizar comentarios orientativos y solicitar una reformulación interactuando con cada uno de los grupos conformados.

La Tabla 1 presenta cada una de las tareas propuesta y la secuencia temporal. Las tareas son de dos tipos: estudio y enseñanza. En la primera se requiere analizar y resolver el problema de manera individual (RI) y grupal (RG), y en la segunda, se solicita proponer una posible organización de la enseñanza grupal (PCG) e individual (PCI).

Tabla 1: Tareas en cada cohorte

| | Estudio | | | | Enseñanza | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CC1 | T1<br>RI | T1bis<br>Reformular RI | T2<br>RG | T2 bis<br>Reformular RG | T3<br>Propuesta PCG | T3 bis<br>Reformular PCG | T4<br>PCI |
| CC2 | T1<br>RI | | T2<br>RG | | T3<br>Propuesta CG | | T4<br>PCI |

Se observa que entre una y otra cohorte se redujeron las tareas, la diferencia entre ellas es que en la segunda, no se solicitaron reformulaciones por escrito. Esto se debe a que las reformulaciones son posteriores a las interacciones con los docentes del curso, y aún así, no presentan cambios relevantes.

# EL problema de la caja

La Tarea fue presentada a los profesores de la siguiente manera:

**El Problema de las cajas**

1. Hay que construir cajas, siguiendo las instrucciones del video: https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY
2. ¿Cuáles son el alto, el ancho y el largo de las cajas que se obtienen si se considera cualquier hoja? ¿Por ejemplo: cómo se calcularía el V, la Sb, el perímetro total, etc.?
3. ¿Cómo podemos realizar cajas anidadas con las hojas A0, A1, A2, etc.?

Los profesores decidieron cuál o cuáles preguntas estudiar y con qué profundidad. Esperábamos que sus opciones estuvieran dirigidas por el programa que realmente ellos enseñan. Es decir que mayoritariamente organizaran la enseñanza adoptando el marco funcional. Si bien las sucesiones y series aritméticas y geométricas, integran el curriculum oficial de la escuela secundaria argentina, en general no son enseñadas.

A continuación, presentamos el Modelo Praxeológico de Referencia elaborado por los investigadores, que incluye las OM involucradas en el estudio de la pregunta generatriz en este contexto institucional y las OD posibles y esperables en la posición de un profesor que va a enseñar con este problema. Un esquema del MPR se presenta en la Figura 8.

El sistema que se intenta estudiar, es una caja rectangular, construida como indica el video. La caja surge de una hoja de dimensiones $L$ y $H$, siendo $L$ la dimensión donde se realizan los dobleces. Realizando algunas consideraciones geométricas a partir de la hoja plegada, se obtienen las relaciones que se representan en la Figura 8 y a continuación:

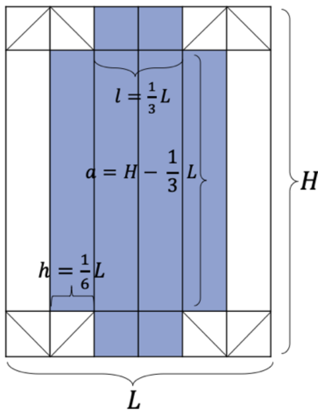



Figura 8. Caja desplegada

¿Cuál es el largo, alto y ancho de la caja dados $L$ y $H$? ¿Qué superficie de la base, superficie lateral, perímetro o volumen tiene la caja? El alto, largo y ancho de la caja:

$$h = \frac{1}{6}L, l = \frac{1}{3}L, a = H - \frac{1}{3}L$$

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow H > \frac{1}{3}L, L > 0$$

La superficie de la base puede escribirse como:

$$S_b(L,H) = l.a = \frac{1}{3}L\left(H - \frac{1}{3}L\right) = \left(\frac{1}{3}L.H - \frac{1}{9}L^2\right)$$

La superficie lateral:

$$S_{lat}(L,H) = \frac{1}{3}LH$$

La superficie total:

$$S_{TOT}(L,H) = \frac{2}{3}LH - \frac{1}{9}L^2$$

El volumen:

$$V(L,H) = \frac{1}{6}L.\frac{1}{3}L.\left(H - \frac{1}{3}L\right) = \frac{1}{18}L^2H - \frac{1}{54}L^3$$

El perímetro sin tapa:

$$P_{\sin tapa}(L,H) = \frac{2}{3}L + 2H$$

El marco funcional permite destacar la dependencia de las diversas magnitudes asociadas a la caja, con las dimensiones de la hoja. En todos los casos, se trata de funciones polinómicas en dos variables o ecuaciones polinómicas en $R^3$. Si se considera que la mayoría de los profesores del curso se desempeñan en la escuela secundaria, la representación geométrica de superficies en $R^3$, o de ecuaciones polinómicas en tres variables, resultaría una organización extraña a dicha institución. En consecuencia, suponemos que es más viable estudiar allí, ecuaciones polinómicas o racionales en dos variables, o sea en $R^2$.

Si se quiere reducir las variables existen diversas posibilidades: es posible parametrizar uno o ambos lados de la hoja, o bien, la superficie de la caja, o el volumen o el perímetro. En el caso de los lados de la hoja, es importante notar que si L fuera un parámetro, todas las funciones a estudiar serán lineales, esto resulta demasiado restringido desde el punto de vista matemático y contraintuitivo desde el punto de vista didáctico. Razón por la cual, el parámetro debería ser $H$.

Si en cambio se optara por parametrizar ambos lados de la hoja, para construir cajas anidadas conforme a las indicaciones de la tarea, se habilita el estudio de un tipo peculiar de funciones, como las sucesiones geométricas.

Si se parametriza el volumen o la superficie, se obtienen ecuaciones racionales en dos variables, o funciones hiperbólicas de una variable, según se muestra a continuación. Si el parámetro es la superficie, se obtiene una familia de funciones hiperbólicas que representan curvas de isosuperficie, tal como se representa en la Figura 9, ya que puede escribirse un lado en función del otro.

$$s = \frac{1}{3}L.H - \frac{1}{9}L^2 \text{ entonces } H(L) = \frac{L}{3} + \frac{3s}{L}, L > 0$$

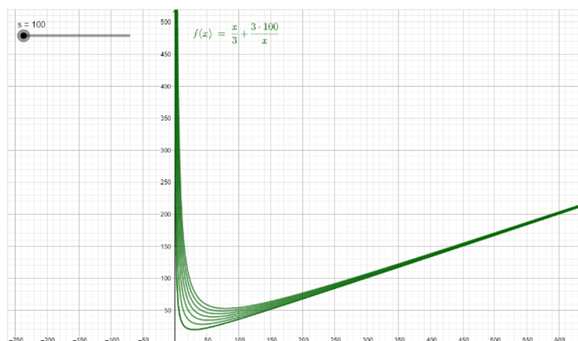



Figura 9. Curvas de isosuperficie

Si el parámetro es el volumen, tendríamos nuevamente una familia de funciones hiperbólicas o curvas de isovolumen, como se representa en la Figura 10.

$$H(L) = \frac{L}{3} + \frac{18\,v}{L^2},\ L > 0$$

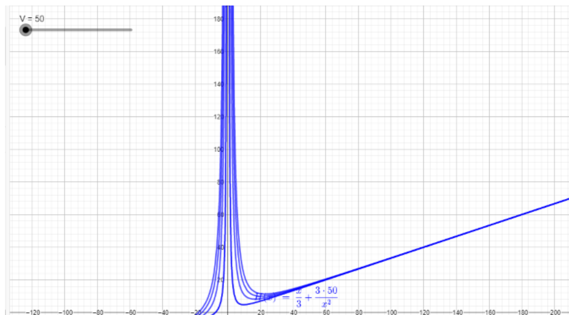



Figura 10. Curvas de isovolumen

La distinción entre constantes, variables y parámetros, así como el carácter relativo e intercambiable de estos dos últimos, como se evidencia en el análisis que venimos realizando, ha sido identificado como una dificultad considerable de los profesores en formación y en servicio, tanto cuando realizan actividades de modelización matemática como cuando tienen que interpretar las

soluciones de una ecuación diferencial (Otero & Llanos, 2018; Gazzola & Otero, 2021).

La dificultad identificada es producto de un extendido y consolidado proceso traspositivo según el cual se enfatiza que los parámetros son fijos. Esto ocurre aún en cursos universitarios de matemática impidiendo ir más allá de los dos primeros niveles de modelización algebraico-funcional, descriptos por Ruiz et al. (2007, 2015).

El problema de la caja resulta apropiado para mostrar a los profesores la importancia y la necesidad del análisis síntesis praxeológico y didáctico cuando se enfrentan con el estudio y la enseñanza de cualquier pregunta, puesto que se trata de una herramienta propia de la actividad de cuestionamiento, que además permite considerar el potencial matemático y didáctico de una cierta cuestión.

## Las cajas anidadas

Las cajas se construyen con la serie de hojas A0, A1, A2, etc. definidas por las normas ISO 216. Dada An el área de An+1 es la mitad del área de la hoja anterior, de este modo se forma una sucesión geométrica de razón 0,5.

Las áreas de las sucesivas hojas rectangulares son proporcionales. Las hojas son rectángulos semejantes, en consecuencia, sus lados son proporcionales. En este caso, y más allá del área de la hoja A0, fijada por la norma, la forma de construcción de las hojas sucesivas conduce a que la razón entre los lados es $\frac{H}{L} = \sqrt{2}$.

Los lados de las hojas sucesivas, los perímetros de las cajas obtenidas con ellas, las superficies de sus bases y los volúmenes, conforman respectivamente, sucesiones geométricas, que son funciones de $n \in N$.

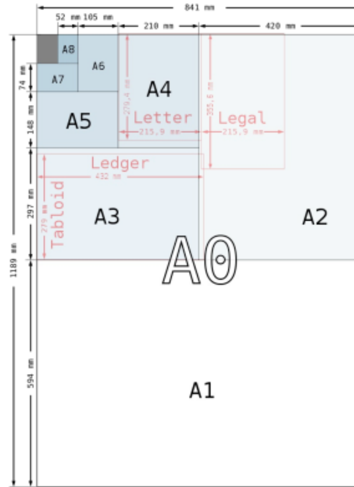



Figura 11. Serie de las hojas formato DIN A

Fuente: ISO_216

Para el lado menor de A0, haciendo $L = a$

$$l_n(n): a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}a \ldots. \qquad l_n(n) = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

Para las superficies de la base de la caja:

$$Sb_n(n): \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right), \frac{a^2}{6}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right), \frac{a^2}{12}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$Sb_n(n) = \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Para los volúmenes de la caja:

$$V_n(n) = \frac{a^3}{18}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1}$$

A continuación, describimos las categorías construidas inductivamente, a partir de las soluciones de los profesores

en cada una de las tareas propuestas en la Tabla 2 y discutimos los resultados obtenidos.

## Las soluciones de los profesores

Las tareas pueden dividirse en aquellas donde el profesor estaba en la posición de estudiante universitario, el las cuales debía resolver y analizar el problema, sin que explícitamente se hubiera solicitado cómo o qué enseñar con él y tareas de enseñante donde sí, se solicitó organizar la enseñanza con la pregunta estudiada previamente.

Tabla 2: Frecuencias relativas para las tareas de la primera cohorte

| C1 | | Estudiante | | | | Enseñante | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | T1 | T1 bis | T2 | T2 bis | T3 | T3 bis | T4 |
| Representación de la caja | | | | | | | | |
| 0 | No | 0,48 | 0,55 | 0 | 0 | 0,47 | 0,32 | 0,58 |
| 1 | Tridimensional o desplegada | 0,27 | 0,21 | 0,47 | 0,32 | 0,35 | 0,50 | 0,25 |
| 2 | Consideracione s geométricas | 0,24 | 0,24 | 0,53 | 0,68 | 0,18 | 0,18 | 0,17 |
| Solución Numérica | | | | | | | | |
| 0 | No | 0,48 | 0,27 | 0,15 | 0,00 | 0,47 | 0,18 | 0,42 |
| 1 | Cajas | 0,12 | 0,06 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 0,46 |
| 2 | Cajas anidadas | 0,27 | 0,45 | 0,71 | 0,85 | 0,53 | 0,68 | 0,04 |
| 3 | Ambas cajas | 0,12 | 0,21 | 0,15 | 0,15 | 0,00 | 0,00 | 0,08 |
| Solución Algebraica | | | | | | | | |
| 0 | No | 0,06 | 0,06 | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 0,29 | 0,38 |
| 1 | Fórmulas | 0,85 | 0,79 | 0,82 | 0,68 | 0,85 | 0,71 | 0,33 |
| 2 | Dependencia funcional | 0,09 | 0,15 | 0,18 | 0,32 | 0,00 | 0,00 | 0,29 |
| Sucesión Geométrica | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | No | 0,85 | 0,33 | 0,47 | 0,15 | 0,68 | 0,50 | 0,75 |
| 1 | Si | 0,15 | 0,67 | 0,53 | 0,85 | 0,32 | 0,50 | 0,25 |

Tabla 3: Frecuencias relativas para las tareas de la segunda cohorte

| C2 | | Estudiante | | Enseñante | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | T1 | T2 | T3 | T4 |
| Representación de la caja | | | | | |
| 0 | No | 0,26 | 0,00 | 0,23 | 0,03 |
| 1 | Tridimensional o desplegada | 0,35 | 0,55 | 0,45 | 0,47 |
| 2 | Consideraciones geométricas | 0,39 | 0,45 | 0,32 | 0,50 |
| Solución Numérica | | | | | |
| 0 | No | 0,65 | 0,29 | 0,29 | 0,47 |
| 1 | Cajas | 0,13 | 0,00 | 0,42 | 0,23 |
| 2 | Cajas anidadas | 0,10 | 0,61 | 0,00 | 0,23 |
| 3 | Ambas cajas | 0,13 | 0,10 | 0,29 | 0,07 |
| Solución Algebraica | | | | | |
| 0 | No | 0,00 | 0,00 | 0,26 | 0,07 |
| 1 | Fórmulas | 0,94 | 0,84 | 0,58 | 0,77 |
| 2 | Dependencia funcional | 0,06 | 0,16 | 0,16 | 0,17 |
| Sucesión Geométrica | | | | | |
| 0 | No | 0,97 | 0,39 | 0,61 | 0,47 |
| 1 | Si | 0,03 | 0,61 | 0,39 | 0,53 |

**Solución numérica**: Esta categoría se generó porque en un número considerable de respuestas, los profesores asignan valores numéricos a las hojas y resuelven numéricamente. Las subcategorías, analizan si esto se realiza solo para la caja, construida con cualquier hoja, o para las que debían usar la serie DIN A, o en ambos casos.

**Solución Algebraica:** esta categoría describe las soluciones de quienes optaban o no, por la búsqueda y el empleo de fórmulas para representar las relaciones entre

las variables. Además, se analiza si las soluciones explicitan algún tipo de relación funcional entre las variables.

**Sucesión Geométrica:** Si bien el currículum oficial contiene a la organización matemática Sucesiones y series, que involucra a las sucesiones aritméticas y geométricas, estas no son enseñadas en la práctica. Por eso, inicialmente muy pocos profesores resolvieron la tarea de las cajas anidadas, relacionándola con esta OM.

**Representación pictórica-geométrica de la caja:** esta categoría analiza la importancia otorgada a la hoja desplegada, donde se aprecian los pliegues, que surge de desarmar la caja, tanto en la solución como en la enseñanza. Es decir, se analiza si los profesores consideraban la utilidad de la caja "desarmada" para formular las relaciones entre las variables y si tomaban en cuenta las relaciones geométricas que justifican dichas relaciones al proponer fórmulas para las dimensiones de la caja.

Tomando en cuenta los valores de la Tabla 2, en la posición de estudio, solo la mitad de los profesores de la primera cohorte, analizan desde el inicio la construcción y deconstrucción de la caja, que es clave para modelar matemáticamente las relaciones del sistema. Solo las consideran, cuando los responsables del curso les solicitan usar la caja desplegada como modelo. Luego, en la posición de enseñante, el recurso a la caja nuevamente desaparece y en la mayoría de los casos y se opta por los números. Como se muestra en la Tabla 3, en la segunda cohorte, el armado y desarmado de la caja cobra mayor protagonismo en ambas posiciones. Esto se atribuye a la insistencia del equipo docente, obtenida de la experiencia con la cohorte anterior.

Si se analizan las soluciones numéricas de la primera cohorte para la posición estudio, en la primera solución y en la reformulación solicitada, la mayoría de los profesores

resolvió el problema numéricamente ya sea para la caja, las cajas anidadas o en ambos casos, siendo estas categorías excluyentes. En la tarea dos, que se refiere a las cajas anidadas, esto se incrementa y la frecuencia relativa llega a 0,85. En la segunda cohorte, disminuyen las soluciones numéricas para el modo estudio, comparado con la cohorte previa, mientras que en el modo enseñanza aumentan las soluciones numéricas para las cajas anidadas. En la posición de enseñar, en ambas cohortes, se observa que numerosos profesores proponen que los estudiantes obtengan y justifiquen las fórmulas generalizando las operaciones a partir de los números. Esto es matemáticamente complejo y didácticamente inapropiado.

En la categoría soluciones algebraicas, en ambas cohortes y en la posición de estudio, se observa que casi todas las soluciones usan fórmulas. Sin embargo, cuando los profesores tienen que organizar la enseñanza, como ya se mencionó, retroceden a los números y proponen que los estudiantes obtengan las fórmulas a partir de ellos. También se observa que, en ambas posiciones, unos pocos profesores consideran a las relaciones como funcionales y solo lo hacen después, por insistencia de los docentes del curso. La desconsideración por la noción de función se debería a que las funciones en dos variables no pertenecen al programa de estudios de la secundaria, y por lo tanto, no están en el radar de los profesores.

La noción de función es omnipresente en el saber enseñado en la escuela secundaria, pero su enseñanza se restringe a lo sumo, a las funciones polinómicas de primer y segundo grado en una variable. En estos casos, se genera un encuentro con la "definición", más específicamente con la expresión algebraica polinómica y sus parámetros. Se realizan representaciones gráficas a partir de tablas y rara vez se varían los parámetros, sin considerar a las familias de funciones. Los parámetros se describen verbalmente,

ligados a características de la gráfica cartesiana. Si bien algebraicamente, las funciones de una variable son ecuaciones en $R^2$, las técnicas ecuacionales se reducen a una variable, igualando a cero la variable dependiente.

Al dejar de lado las ecuaciones en dos variables, se reduce considerablemente la potencialidad del cálculo algebraico a estudiar y se enmascaran las relaciones de equivalencia que permiten justificar las técnicas ecuacionales. Las técnicas para resolver ecuaciones se presentan como un conjunto de reglas inmotivadas e injustificadas (por ejemplo, se hablará aquí de “reglas del pasaje de términos”, incluso en los primeros cursos universitarios).

En el caso de la caja, y en este contexto, los profesores no se preguntaron cómo reducir las variables ni analizaron qué podría estudiarse si fijaban alguna de ellas, y mucho menos consideraron que parametrizando el perímetro, o el volumen o la superficie de la base, hubieran podido estudiarse incluso, las funciones hiperbólicas de grado tres. Es decir que con relación al MPR esquematizado en la Figura 11, los profesores solo consideran las OM relativas a las funciones polinómicas de una variable, que surgen de reducir las fórmulas a una variable. Esto, se realiza sin el análisis que estamos presentando aquí, razón por la cual, si eligen bien el lado a fijar, podrán enseñar funciones polinómicas hasta el grado tres, o solo lineales.

Es importante destacar aquí, que no atribuimos este proceder a una limitación de los conocimientos matemáticos de los profesores, sino más bien a una ideología escolar retrocognitiva, que rehúye el cuestionamiento, debido a ciertas formas de actuar muy consolidadas. En consecuencia, cuando en el contexto de una situación profesional de enseñanza surge la posibilidad de utilizar un determinado dispositivo (AEI, REI, pregunta, etc.), este es directamente vinculado con

nociones del programa efectivamente enseñado y con las praxeologías dominantes con relación a como enseñar tal o cual saber matemático escolar.

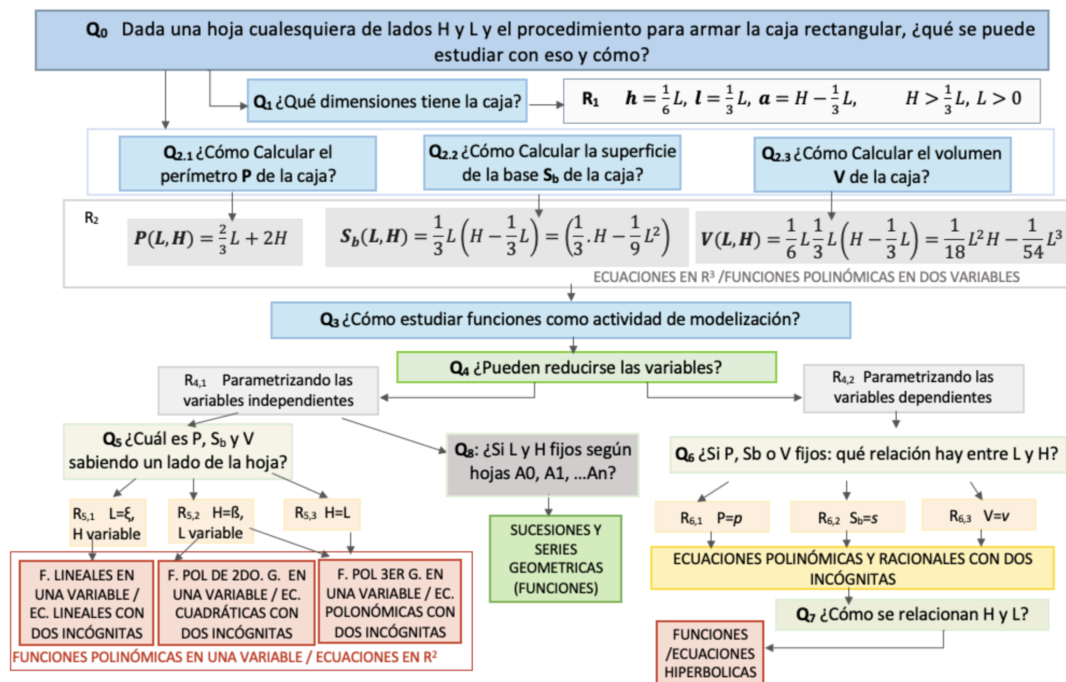
En la práctica profesional habitual del profesor, no se realizan tareas de modelado, ni se cuestiona el saber a enseñar, por lo tanto, no se explora, ni se considera necesario analizar el sistema a modelar. Es decir que el análisis praxeológico y didáctico del saber a enseñar o del enseñado, tampoco es una actividad que los profesores realicen, pues según la ideología escolar predominante, el saber matemático es en los hechos, incuestionable.

Con relación a la categoría sucesión geométrica, en el modo estudio, en el primer encuentro con el problema, en ninguna cohorte se reconoce la presencia de esta praxeología, en la solución. Sin embargo, en la tarea dos, debido a la interacción con los docentes del curso, las sucesiones geométricas se usan para resolver. En el modo enseñanza, el comportamiento de las cohortes cambia. En la primera cohorte, las sucesiones geométricas mayoritariamente desaparecen en el paso a la enseñanza, mientras en la segunda, la mitad de las propuestas intentan enseñar sucesiones geométricas situándose en la transición secundario-universidad.

Tal como destacamos al describir la investigación con el REI de las antenas parabólicas, aquí tampoco estábamos proponiendo un cambio en la enseñanza escolar, sino más bien, intentábamos describir y analizar las decisiones de los profesores en las posiciones de estudio de la pregunta y de enseñanza a partir de ella, lo cual evidentemente es para ellos, muy desafiante y complejo. Por este motivo hipotetizamos que los profesores se preguntarían por cómo reducir las variables, lo cual finalmente hicieron, sin analizar cuál variable era más apropiado fijar. Contrariamente, ellos no se interrogaros sobre eso, sino que al inicio, directamente escaparon del marco funcional,

permaneciendo en el nivel de las fórmulas o de los números. Atribuimos esto a que el problema es disonante con relación a lo que los profesores realmente enseñan: funciones de una variable.

Figura 12. Modelo Praxeológico de Referencia sobre el problema de la caja y los posibles caminos algebraicos de los profesores



# Enseñar investigando y cuestionando al mundo: un balance

En las investigaciones reportadas hasta aquí, analizamos la interacción de los profesores en formación y en servicio con una pregunta generatriz, que podría engendrar un REI.

En esta última investigación la pregunta se dirigía solo a praxeologías matemáticas que están a nuestro juicio muy relacionadas con el curriculum de la escuela secundaria, buscando aproximarnos a conocimientos que suponíamos más familiares a las tareas de enseñanza corrientes de los profesores.

Por otro lado, en el caso de los profesores en servicio, nos interesamos por analizar dos posiciones institucionales diferentes: estudiante de la TAD y enseñante. En la primera posición, se estudiaba la pregunta y se vivía de algún modo el REI, y luego, se requería organizar una enseñanza hipotética a partir de esa pregunta.

Por su parte, los profesores en formación, fueron expuestos al REI codisciplinar sobre la caída de la Piedra oscilante, en la posición de estudiantes. Los obstáculos principales identificados fueron: la prácticamente nula experiencia en actividades de modelización matemática genuinas que ellos tienen, y la concepción dominante en la universidad donde se forman, sobre la modelización.

En la universidad la modelización es concebida como una aplicación que traduce un problema en ecuaciones, y no como la generación de conocimiento nuevo. Paradójicamente, es en la enseñanza universitaria donde más adaptado parece

estar el monumentalismo y el no cuestionamiento. La enseñanza es narrativa, mayormente basada en clases magistrales y en el *teaching for testing*.

Si consideramos las investigaciones realizadas con los profesores en servicio, de manera general, las dificultades son similares a las de los profesores en formación. En la posición de estudio y en la de enseñanza el cuestionamiento es escaso, pero en esta última, se repliega y casi desaparece. Los profesores solo conciben la enseñanza de praxeologías directamente vinculadas con el currículum o con el programa efectivamente enseñado en la escuela secundaria. Lamentablemente, debido a la imposibilidad de acompañar al aula a más de una treintena de personas, la investigación no accedió a lo que efectivamente ellos harían con el dispositivo en un aula concreta. Esta es una cuestión pendiente.

En nuestros primeros trabajos, atribuimos las dificultades de los profesores en servicio, al habitus (Bourdieu, 1983) de tener el “control total” del medio didáctico, para aventar la incertidumbre que supone perderlo o cederlo a otros, como ocurre en un REI. Este fenómeno se profundiza cuando la cuestión a estudiar es codisciplinar, porque les resulta muy extraño enseñar más allá de los límites cerrados que el saber escolar asume, en las disciplinas que ellos enseñan.

Este fue el motivo por el cual decidimos proponer el problema y las cuestiones relativas a la caja, cuyo estudio implica, organizaciones matemáticas más vinculadas al saber efectivamente enseñado, como las funciones polinómicas y otras más alejadas, como las sucesiones.

Esto puso en evidencia que, en efecto, las sucesiones no se encuentran en principio en el “radar” de los profesores de secundaria. Además, se observó que la enseñanza que organizaron se restringe a un estudio de corto alcance matemático, que incluso, llega a ignorar las funciones y se reduce a las fórmulas. Atribuimos esto a que las únicas funciones que se enseñan en la escuela secundaria y en primer año de la universidad, son de una variable. Cuando por sugerencia de los profesores del curso, la enseñanza se organiza alrededor de las funciones polinómicas, la OM es muy incompleta y la OD está muy alejada del cuestionamiento.

En síntesis, los profesores en servicio pudieron lidiar con el estudio de las dos cuestiones generatrices propuestas: la de las antenas parabólicas y las cajas, en posición de estudiantes, pero tan solo por avizorar enseñar con ellas, el cuestionamiento desaparece, se anula.

Nos preguntamos entonces ¿qué ocurriría si un profesor no estuviera en la posición de estudiante de la TAD, sino en una situación profesional real, usando el REI como un recurso para enseñar, así como utiliza un libro? ¿cómo organizaría la enseñanza? ¿qué gestos didácticos realizaría? ¿modificaría el REI? ¿se apegaría al saber enseñado, como sucedió en los estudios previos?

Si un profesor decide usar un REI, en una situación de trabajo, como si fuera un instrumento, es claro que es una persona innovadora y que toma un riesgo alto. Es decir, goza de características personales, muy infrecuentes y apartadas de lo que es habitual en una institución. Por este motivo,

consideramos que estábamos incursionando más en el nivel personal que en el institucional.

En la didáctica profesional y en la didáctica de las matemáticas, existen desarrollos teóricos que permiten describir el trabajo de los profesores como una actividad instrumentada, a partir de artefactos, ya sean estos materiales o no.

En consecuencia, adoptamos un enfoque propio de la Didáctica Profesional y sus desarrollos en la didáctica de las matemáticas, como la Aproximación instrumental de lo Didáctico (Rabardel, 1995) y la Aproximación documental de lo didáctico (Gueudet & Trouche, 2009) que surge a partid de ella.

Buscamos entender la situación personal de enseñar con un dispositivo tipo REI, y con otros recursos vinculados a problemas escolares y a saberes matemáticos propios de la escuela secundaria. Estas son nuestras investigaciones más recientes y las describimos a continuación. Es importante que el lector no pierda de vista que esta inmersión en la dimensión personal que describimos en los capítulos siguientes, no abandona el problema de cómo formar profesores en el paradigma de cuestionar al mundo.

# Capítulo 6

# LA DIDÁCTICA PROFESIONAL

## La aproximación instrumental de lo didáctico

El enfoque instrumental fue propuesto por Pierre Rabardel (1995) a partir de la Teoría de la Actividad (Vygotsky, 1978) y de la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990, 2013). Esta teoría se introduce y se desarrolla en el campo de la ergonomía cognitiva y la didáctica profesional.

En las situaciones en las cuales las personas utilizan un artefacto, que puede ser material o no, tiene lugar un proceso de apropiación, que requiere distinguir entre el artefacto en sí y el instrumento que la apropiación genera (Figura 12). Es mediante este proceso, denominado por Rabardel (1995) génesis instrumental, que el artefacto se vuelve un instrumento para el usuario. La actividad del usuario y la situación que la promueve son determinantes.

Los instrumentos se generan por las interacciones que ocurren entre un artefacto y los esquemas del sujeto en una cierta situación. La noción de esquema remite a la formulación de Vergnaud (1998, 2013), ya que el esquema no es la actividad en sí, sino su organización invariante. De este modo, cuando la actividad en situación se realiza usando artefactos, el sujeto despliega su repertorio de esquemas y organiza una acción instrumentada por medio de un esquema de uso del o los artefactos en cuestión. Un instrumento es entonces una entidad mixta, compuesta al menos por una parte del artefacto más un esquema de uso de dicho artefacto.

La génesis instrumental, comprende dos procesos interrelacionados (Rabardel, 1995): instrumentación e instrumentalización. La instrumentalización está relacionada con la personalización del artefacto y la instrumentación con la aparición de esquemas en el sujeto.

En la instrumentación las limitaciones y potencialidades de un artefacto condicionan la acción del sujeto que se sirve de él para resolver cierto problema. Un mismo artefacto, puede generar diferentes formas de organización de la actividad en diferentes individuos, que tendrán esquemas de asimilación diferentes y construirán invariantes operacionales distintos. La instrumentación, es un proceso dirigido hacia el sujeto.

La instrumentalización en cambio, es un proceso dirigido hacia el artefacto, que puede resultar parcialmente incluido en el instrumento, readaptado, modificado. Por ejemplo, en el caso de la acción instrumentada de diferentes profesores, es posible que ellos actúen con el mismo recorrido de estudio e investigación (REI), como se mostró en la pregunta de las antenas parabólicas. En ese caso, se generaron distintas instrumentalizaciones que produjeron actividades e instrumentos diferentes en la situación de enseñanza.

Es importante insistir en el carácter dialéctico de estos procesos, que son siempre inacabados, por más pericia que un profesional posea en el uso de un instrumento, siempre le será posible incrementarla y afianzarla, desarrollando aspectos nuevos.

La Figura 13, propone un esquema de la génesis instrumental:




Figura 13: Esquema de la Génesis Instrumental.

Esto es particularmente cierto e importante en la profesión de profesor. Para comprender las instrumentaciones y los instrumentos que generan los profesores, es fundamental poder describir las modificaciones que ocurren en los esquemas. Los invariantes operatorios (IO) son según Vergnaud (2013), la forma metodológicamente más económica para acceder al esquema.

## Esquemas e invariantes operatorios

Nuestro análisis relaciona el enfoque instrumental con la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) al considerar un tipo particular de artefacto como un REI y analizar la génesis instrumental que se desarrolla a partir de él.

La TCC permite considerar integralmente la actividad en situación del sujeto que aprende, no como una persona en particular, sino en tanto sujeto

individual y social, que asimila un artefacto a sus esquemas de acción.

En consecuencia, para este nivel de análisis, la TCC nos resulta más funcional que la TAD. En la TAD, no disponemos de instrumentos para analizar el aprendizaje ni el nivel personal, a menos que, se adopten constructos cuestionables como las denominadas "praxeologías personales", de dudoso sustento teórico, porque las praxeologías son siempre institucionales y no permiten explicar la asimilación del artefacto REI al conjunto de instrumentos que el profesor ya posee.

## Forma operatoria y predicativa del conocimiento

La TCC es una teoría pragmática de la conceptualización de lo real que ofrece instrumentos teóricos para analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, la conceptualización y el desarrollo en un cierto dominio. Como ya fue tratado antes, pragmático significa que el sujeto actúa en función de las consecuencias de sus acciones.

Vergnaud (1990, 1998, 2007, 2013) propone la existencia de dos formas del conocimiento en interacción permanente y no en oposición, la forma operatoria y la forma predicativa. La forma operatoria, le permite al sujeto actuar con cierto suceso en una situación. Según Vergnaud (2013) es un hecho muy positivo que se le otorgue gran

importancia a la forma operatoria del conocimiento (Otero, 2019). Pero esto no mengua la importancia de la forma predicativa, cuya función es identificar los objetos del mundo, reconocerlos, enunciar lo que hacemos, generar textos e incluso libros sobre cómo se hacen ciertas cosas.

Para la enseñanza y el aprendizaje es muy importante tomar en cuenta que el conocimiento comienza mucho antes de que el sujeto se sea capaz de ponerlo en palabras.

## Situaciones, esquemas, actividad e invariantes operatorios

Para estudiar el aprendizaje de un dominio específico, se necesita establecer de una manera precisa, una relación con esa porción de lo real, que se manifiesta en una situación, en "une tâche" (tarea). La situación tiene el carácter de tarea y toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, acerca de las cuales es importante conocer su naturaleza y sus obstáculos (Vergnaud, 1998, p.8).

Una situación, representa a una clase de situaciones, con especificidades epistemológicas bien definibles. Los sujetos se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en la situación, lo que resulta modificado durante la adaptación. Así, una clase de situaciones convoca a ciertos esquemas, que se desarrollan en virtud del tipo de situación.

Entre las cuatro definiciones de esquema propuestas por Vergnaud (1990, 2007, 2013) seleccionamos la siguiente: Un esquema

necesariamente está compuesto por cuatro clases de componentes: una meta o varias, submetas y anticipaciones, las reglas de acción, de captación y control de la información, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias.

Un concepto en acto no es un concepto, ni un teorema en acto es un teorema strictu sensu. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Este no es necesariamente el caso para los invariantes operatorios.

Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización; pero sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esta parte visible no sería nada. Estos invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990).

Vergnaud (1990, 2013) sustituyó la relación piagetiana sujeto-objeto por la de esquema-situación. El concepto de esquema es esencial para conocer los gestos, los razonamientos, las operaciones técnicas y científicas, las interacciones sociales y lingüísticas, la afectividad y las emociones. Todos los registros de la actividad están presentes tanto en las situaciones de trabajo y de formación

continua como también, en la formación inicial que puede producirse en la escuela.

## La aproximación documental de lo didáctico

La aproximación documental de lo didáctico (ADD) se basa en la aproximación instrumental de Rabardel (1995) y fue desarrollado por Gueudet y Trouche (2009). Así, la génesis instrumental es redefinida como una génesis documental, es decir un proceso que transforma un recurso en un documento para enseñar algo (Gueudet et al., 2015). En esta redefinición, el profesor es el sujeto y los artefactos son los recursos que utiliza en su profesión.

La ADD asume que el trabajo central de los profesores consiste en diseñar la enseñanza de saber a partir de una variedad de recursos. El enfoque estudia las interacciones entre los docentes y los recursos y sus consecuencias, en un contexto donde hay una gran cantidad de recursos didácticos disponibles (Íbid, 2012).

La noción de *recurso* proviene de las ideas de Adler (2000, 2012). Los recursos son todo aquello que da sentido, apoya, proyecta y regenera el trabajo del profesor, ya sea material o simbólico. El término recurso comprende a todo lo que los profesores usan para trabajar y desarrollar su práctica profesional como: un libro de texto; un software; páginas web y orientaciones curriculares. Además, también se consideran recursos a los intercambios con colegas y las producciones de los estudiantes.

Cuando realizan los profesores realizan una cierta tarea de enseñanza, buscan recursos, los seleccionan,

los modifican; los llevan al aula y los comparten con colegas. Durante el proceso de instrumentalización, los conocimientos de los profesores influyen en la elección de los recursos y en la manera en la que son modificados; mientras que, en la instrumentación, se desarrollan los esquemas de uso de esos recursos (Gueudet et al., 2018).

Un documento es, al igual que un instrumento, una entidad mixta, que vincula un conjunto de recursos y un esquema de uso para estos recursos. Estos esquemas dan cuenta de cómo, en la profesión de profesor, las situaciones de trabajo se realizan con la asistencia de herramientas, materiales o no, cuyo uso las torna eficaces y funcionales a la situación. De allí la importancia de analizar tanto a los documentos, como de conocer los esquemas de uso que tienen asociados.

Para Vergnaud (2013) los esquemas pueden describirse si se logra identificar los invariantes operatorios que ellos contienen:

> Plus décisifs encore du point de vue cognitif, sont les invariants opératoires, puisque les concepts-en-acte permettent de prélever dans l'environnement les informations pertinentes, et de sélectionner les théorèmes-en-acte nécessaires au calcul à la fois des buts et sous buts susceptibles d'être formés, et des règles d'action, de prise d'information et de contrôle permettant de les atteindre. (Vergnaud, 2013, p. 139).

Las diversas génesis documentales que los profesores producen a lo largo de su vida profesional, generan conocimientos que les permiten

decidir y actuar de manera rápida, afrontar los cambios en una tarea y garantizar resultados productivos y viables. Estas nociones explican la génesis de las formas de acción y su dinamismo, así como su estabilidad y posible resistencia al cambio.

## Sistemas de Instrumentos

Cada nuevo instrumento (recurso) en nuestro caso, no permanece aislado (Rabardel y Bourmaud, 2005). Se asimila a un sistema de instrumentos (SI) ya constituido y estructurado según la experiencia del profesional, por ejemplo, del profesor. Según Bourmaud (2006), un sistema de instrumentos es:

(1)Heterogéneo: organiza amplios conjuntos de instrumentos y recursos de distinta naturaleza;

(2)Finalizado está vinculado a los objetivos de acción del sujeto y debe permitir un mejor equilibrio entre los objetivos de economía y eficiencia;

(3)Vicariante: tiene características de complementariedad y redundancia de funciones;

(4)Subjetivo: es diferente de un operador a otro y está estructurado de acuerdo con su experiencia y habilidades;

(5)Organizado en torno a un instrumento pivote: un instrumento que juega un papel particular de organizador, de pivote para los demás instrumentos.

El hecho de que los profesores dispongan de un sistema de instrumentos, evidencia que los recursos que ponemos a su disposición ya sea durante la formación y cuando ya se encuentran en servicio, no son neutros, sino que se integran a un sistema de instrumentos propio, cuyas características no

conocemos en detalle, pero que afecta a las acciones que los profesores terminan realizando con los recursos, y al instrumento-documento que se producirá.

Los constructos producidos por la ADD, no agotan ni describen completamente el problema didáctico de la formación de profesionales de la enseñanza. De hecho, puede parecer un tanto reduccionista centrarse solo en el problema de los recursos para enseñar. Sin embargo, el marco parece prometedor para comprender por qué los profesores que utilizan un REI, una AEI, en tanto que recursos de enseñanza, suelen desvirtuar las características y los fines para los cuales esos dispositivos fueron diseñados y cómo podemos lograr que se apropien de estos artefactos en la dirección del cuestionamiento.

A continuación, reportamos algunas investigaciones realizadas con estos marcos teóricos.

# La génesis documental de un REI: un estudio de caso

En este trabajo, nos propusimos estudiar cómo una profesora de matemáticas usa e implementa en su clase, el recurso REI relativo al funcionamiento de las antenas parabólicas (Bellenué, et al., 2014).

En un trabajo publicado en la Recherche des Mathematiques (Gueudet et al., 2018) presentamos el análisis del trabajo documental que la profesora realizó al implementar el REI. Allí, nos enfocamos en las interacciones entre la profesora y el sistema de recursos, mientras implementa el REI. Si bien realizamos alguna referencia a los invariantes operatorios, no detallamos cómo fueron inferidos ni la tipología generada.

En otro trabajo (Parra y Otero, 2021) detallamos e identificamos los IO que dirigen la actividad matemática y didáctica de esta profesora, cuya meta es hacer funcionar el REI en un curso de matemática de la escuela secundaria francesa (estudiantes de 15-16 años). La cuestión generatriz del REI es $Q_0$: ¿Cómo funciona una antena parabólica?

La profesora desarrolló el REI en un curso de matemática del liceo francés (estudiantes de 15-16 años) durante 8 sesiones de clases, en el ciclo escolar 2016/2017. Aquí no nos centramos en la implementación del REI en el aula, sino en determinar las acciones desarrolladas que se corresponden con los invariantes operatorios (IO) inferidos de las entrevistas.

## El caso de la profesora

La profesora trabaja en el nivel secundario desde hace más de 35 años, en equipo con los demás profesores de matemática de la institución. Al inicio del año académico, todos los profesores de matemática realizan en conjunto la planificación anual para sus cursos, analizando las continuidades entre cada nivel escolar y cada unidad del programa. La planificación contiene los tiempos precisos de duración para cada unidad y las nociones a abordar, así como las fechas de las evaluaciones por unidad, que son corregidas por todos los profesores de matemática: el profesor de un curso, no corrige las evaluaciones escritas de su curso, sino las de otro profesor.

En estas condiciones, la profesora decidió implementar el REI sabiendo que produciría cambios en todos los aspectos de la planificación. Ella tiene acceso al recurso en papel (Bellenoué et al., 2014), donde se describe el recorrido y una posible manera de implementarlo en el aula. Además, dispone del material digital vinculado al libro, que se encuentra on-line, con acceso restringido, en el sitio web del IREM de Poitiers. La institución dispone de la infraestructura necesaria para el desarrollo de un REI.

Los investigadores registraron en audio dos entrevistas con la profesora: una de ellas, previa a la implementación del REI (entrevista 1) y otra, posterior a dicha implementación (entrevista 2); y sus correspondientes transcripciones. A partir de estos registros se infirieron los IO

El desarrollo del REI en el aula fue íntegramente registrado en video y se tomaron notas de campo. Estos registros se usan para triangular los IO previamente construidos. También se dispone de la versión digital del material que la profesora propuso a los estudiantes y de todos los recursos utilizados por ella para seleccionar las tareas adicionales propuestas y utilizadas en clase. Estos registros permiten identificar y describir las modificaciones que la profesora realizó al artefacto REI y, como los registros del aula, permiten triangular los IO construidos a partir de las entrevistas.

## Los IO de la profesora

Los invariantes operatorios se clasificaron en cuatro clases: IOC sobre el conocimiento, sobre el tiempo didáctico, las ayudas al estudio y sobre el profesor (Parra y Otero, 2021)

IOC *relativos al conocimiento*. Se refieren a las nociones a enseñar y los saberes estudiados en el aula.

En la Tabla 4, se observa que los IO giran alrededor del programa de estudios, a su cumplimiento. También se observa que la profesora necesita tratar la perpendicularidad de dos rectas, más que la ortogonalidad como una noción más general, porque ella sabe que este tema del programa, integrará la evaluación común a todo el liceo.

Tabla 4: IOC relativos al conocimiento (Parra y Otero, 2021, p. 349)

| | |
|---|---|
| IOC<br>Es necesario tratar los temas del programa de matemática | $IOC_1$: Es necesario dar sentido a lo que se enseña.<br>$IOC_2$: Es necesario tratar los temas del programa.<br>$IOC_3$: El REI permite tratar los contenidos del programa.<br>$IOC_4$: Es necesario preparar el encuentro de los estudiantes con el contenido del programa.<br>$IOC_5$: Es necesario hablar de ortogonalidad antes de pasar por el producto escalar.<br>$IOC_6$: Tratar la ortogonalidad vinculada únicamente al producto escalar es muy teórico y poco útil.<br>$IOC_7$: La perpendicularidad es un instrumento.<br>$IOC_8$: La ortogonalidad se puede tratar como perpendicularidad.<br>$IOC_9$: El REI permite revisar los temas que los alumnos han estudiado años anteriores. |

IOT *relativos al tiempo*, se refieren al tiempo requerido para el estudio, o para resolver una tarea, desarrollar una cuestión, o una validación, etc.

Aquí se refleja la preocupación de la profesora por el control del tiempo, debido a su necesidad de cumplir con el programa.

Tabla 5: IOT relativos al tiempo (Parra y Otero, 2021, p. 350)

| | |
|---|---|
| IOT Es necesario que el profesor controle el tiempo. | $IOT_1$: Es necesario controlar el tiempo.<br>$IOT_2$: Dividir la clase en dos grupos permite controlar el tiempo.<br>$IOT_3$: Es necesario que los alumnos realicen las investigaciones fuera del aula para no perder tiempo.<br>$IOT_4$: Es necesario recuperar el tiempo perdido a causa del REI.<br>$IOT_6$: Es necesario que los estudiantes encuentren las buenas ideas antes de los diez minutos.<br>$IOT_7$: El profesor no puede perder el control de los tiempos de la clase. |

*IOAE relativos a las ayudas al estudio*: se refieren a la forma en que la profesora ayuda a los estudiantes. En la tabla siguiente se encuentran los invariantes relativos al profesor como guía para los alumnos.

Tabla 6: IOAE relativos a las ayudas al estudio (íbid)

| | |
|---|---|
| IOAE: Es necesario que el profesor guíe el trabajo de los alumnos. | $IOAE_1$: Es necesario que el profesor dé todas las herramientas a los alumnos para que puedan hacer los cálculos.<br>$IOAE_2$: Los alumnos no saben cómo hacer una investigación, el profesor debe ayudarlos.<br>$IOAE_3$: Los trabajos personales encuadrados (TPE) proveen métodos de investigación a los alumnos.<br>$IOAE_4$: Los alumnos quieren hacer lo que el profesor indica. |

En esta categoría, también se identificaron invariantes que expresan el mito, de que el profesor debe motivar a los alumnos.

| | |
|---|---|
| IOAE: Es necesario implicar y motivar a los alumnos (incorporando un contexto, un software, un REI, etc.). | $IOAE_5$: Es necesario implicar y motivar a los alumnos.<br>$IOAE_6$: El GeoGebra permite motivar a los alumnos.<br>$IOAE_7$: Verificar las salidas del GeoGebra de la vista algebraica con los cálculos es una motivación para los alumnos.<br>$IOAE_8$: El REI da a los alumnos una motivación.<br>$IOAE_9$: Los alumnos no están en condiciones de hacer los cálculos solos.<br>$IOAE_{10}$: El GeoGebra reduce las dificultades de los alumnos porque contiene una herramienta para determinar la recta tangente.<br>$IOAE_{11}$: El uso del GeoGebra es hiper intuitivo para los alumnos.<br>$IOAE_{12}$: El uso del GeoGebra no genera dificultades a los alumnos porque ellos han visto a la profesora utilizarlo. |

Se observa que la profesora considera al software como fuente de motivación, pero también al llamado “contexto” de los problemas y en línea con esto, al REI, como motivador.

También se identificó que la profesora intentaba generar narrativas y contextos, como una manera de dar sentido al saber matemático. Al igual que la mayoría de los profesores, ella considera que así resulta “más simpático” o más agradable para los alumnos. Simultáneamente, la profesora se preocupa por preparar a los estudiantes para las evaluaciones, proponiendo tareas muy clásicas.

| | |
|---|---|
| IOAE: Es necesario gestionan bien los recursos para ayudar a los alumnos. | $IOAE_{13}$: Los REI permiten contar a los alumnos una historia por detrás de los contenidos.<br>$IOAE_{14}$: La narrativa que está detrás de los problemas propuestos en un REI vuelve a la matemática más simpática para los alumnos.<br>$IOAE_{15}$: Los REI permiten mostrar a los alumnos para qué sirve la matemática.<br>$IOAE_{16}$: Es necesario gestionar bien los recursos para ayudar a los alumnos.<br>$IOAE_{17}$: Es necesario proponer a los alumnos ejercicios muy similares a los propuestos en la clase.<br>$IOAE_{18}$: Es necesario proponer a los alumnos actividades hiper clásicas.<br>$IOAE_{19}$: El examen final debe contener tanto tareas contextualizadas como técnicas. |

*IOP relativos al profesor* se refiere a lo que la profesora considera que puede y debe hacer

Tabla 7: IOP relativos al profesor (Parra y Otero, 2021, p. 352)

| | |
|---|---|
| IOP Es necesario que el profesor controle todo el desarrollo del proceso de estudio. | $IOP_1$: El profesor debe marcar el tema al inicio del REI.<br>$IOP_2$: Es necesario que el profesor ayude a los alumnos a encontrar las buenas ideas.<br>$IOP_3$: El profesor debe pedir a los alumnos que formulen preguntas.<br>$IOP_4$: El profesor no debe poner en “jaque” a los alumnos.<br>$IOP_5$: El profesor debe evitar las situaciones que los alumnos no puedan resolver. |

Los IO vinculados a las ayudas al estudio son preponderantes. La profesora posee un amplio repertorio de lo que, a su juicio, son formas de "ayudar" a los estudiantes. Por ejemplo, aportar respuestas, soluciones, modificar las "tareas/estudios" propuestos en el artefacto REI, que ella decidió implementar. Sus modificaciones son de tal porte, que la mayoría de ellas acaban generando ejercicios "tradicionales/clásicos", en los cuales la solución es casi inmediata y no requiere estudios ni investigaciones adicionales. Esto se aleja considerablemente del tipo de actividad propuesta en el artefacto REI.

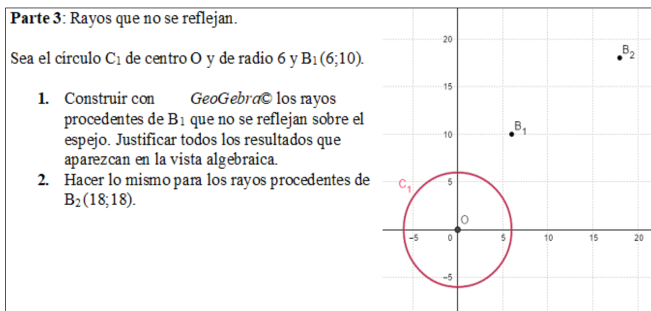
Los IO relativos al conocimiento, se relacionan con el saber propuesto por el programa oficial. La profesora constantemente vincula lo que debe estudiarse y la forma de hacerlo, con el programa. Es que ella debe abordarlo en su totalidad, en el tiempo y forma acordado con los demás profesores de matemática de la Institución.

El examen llamado "deber común" que, los estudiantes deben realizar de forma individual y que será revisado y calificado por otra profesora que no es ella, incide fuertemente en sus IO, que se relacionan con la situación laboral en la que se encuentra.

## Modificaciones realizadas al REI

Es interesante considerar qué cambios realizó la profesora en el REI, mientras enseñaba. Para un análisis detallado, remitimos al lector a Gueudet et al. (2018) y a Parra y Otero (2021). Al inicio del recorrido, la profesora modificó las dos investigaciones que el libro propone para que sean

los estudiantes quienes las realicen. Una, es sobre las antenas parabólicas y la otra, sobre la reflexión en un espejo plano. La profesora conformó dos grupos y asignó una investigación a cada uno. Esto tuvo lugar en grupos y fuera del aula -como tarea para el hogar. El libro sugería que los estudiantes comuniquen los resultados a toda la clase, pero aquí los resultados se entregaron a la profesora, impresos o por e-mail. Estas acciones se basan en los ($IO_T$), es decir, en la necesidad de controlar el tiempo.



**Parte 3**: Rayos que no se reflejan.

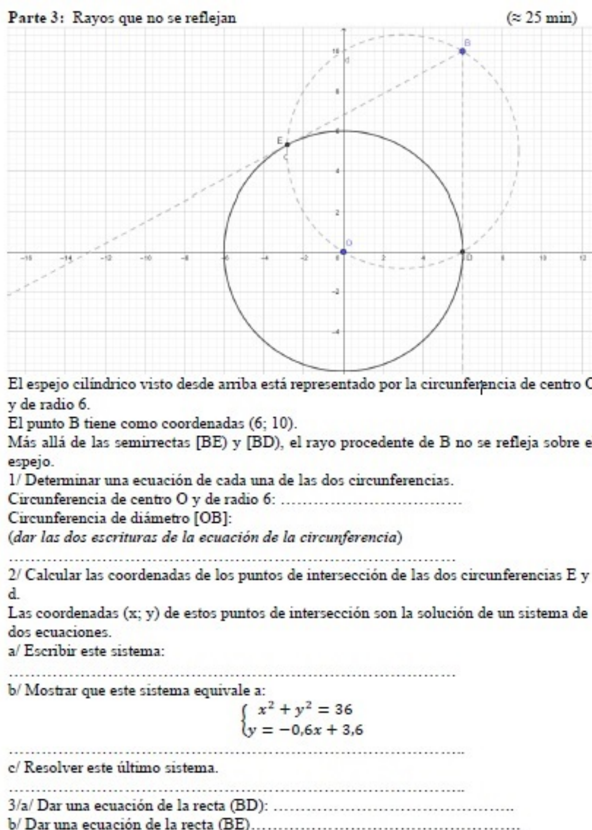
Sea el círculo $C_1$ de centro O y de radio 6 y $B_1(6;10)$.

1. Construir con *GeoGebra©* los rayos procedentes de $B_1$ que no se reflejan sobre el espejo. Justificar todos los resultados que aparezcan en la vista algebraica.
2. Hacer lo mismo para los rayos procedentes de $B_2(18;18)$.



Figura 14: Estudio 1, Parte 3 (Bellenoué et al. 2014, p.52)

La profesora reformuló considerablemente las tareas que el libro llamaba “estudios”. Por ejemplo, en la parte tres del estudio 1 (Figura 14 y Figura 15), la profesora suprimió el ítem B2 y modificó la figura de análisis, representando las circunferencias y rectas. Además, subdividió la actividad en incisos más “pequeños” que no estaban previstos.



**Parte 3: Rayos que no se reflejan** (≈ 25 min)

El espejo cilíndrico visto desde arriba está representado por la circunferencia de centro O y de radio 6.
El punto B tiene como coordenadas (6; 10).
Más allá de las semirrectas [BE) y [BD), el rayo procedente de B no se refleja sobre el espejo.
1/ Determinar una ecuación de cada una de las dos circunferencias.
Circunferencia de centro O y de radio 6: ……………………………
Circunferencia de diámetro [OB]:
*(dar las dos escrituras de la ecuación de la circunferencia)*
………………………………………………………………………
2/ Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las dos circunferencias E y d.
Las coordenadas (x; y) de estos puntos de intersección son la solución de un sistema de dos ecuaciones.
a/ Escribir este sistema:
………………………………………………………………………
b/ Mostrar que este sistema equivale a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = -0{,}6x + 3{,}6 \end{cases}$$

………………………………………………………………………
c/ Resolver este último sistema.
………………………………………………………………………
3/a/ Dar una ecuación de la recta (BD): ……………………………………
b/ Dar una ecuación de la recta (BE)……………………………………………

Figura 15: Estudio 1, Parte 3 propuesta por la profesora

El estudio 2, referido a un espejo parabólico, también fue modificado de manera sustancial. El libro propone estudiar la tangente a una curva en un punto, hallar una fórmula y verificar que la recta obtenida es la tangente, a partir de cuatro “métodos” posibles, a los efectos de que los estudiantes puedan

discutirlos matemáticamente. La profesora en cambio, anuló la exploración de los métodos. Ella presentó cuatro gráficas, indicando el valor de la pendiente de la recta tangente y agregó ítems de completamiento en líneas punteadas. Como fue mencionado antes, segmentó la tarea en varios incisos.

Los cambios de este tipo son evidencia de los IOP relativos a la actividad del profesor y los IOC sobre el contenido. El detalle en las representaciones, la descomposición secuencial de las tareas y los ítems de completamiento, indican que, para la profesora, es necesario guiar a los estudiantes lo más posible en el desarrollo de los estudios. Esto asegura el cumplimiento del programa y el control del tiempo por parte del profesor. Así, la profesora coloca en el margen derecho de cada ítem, el tiempo máximo disponible en minutos.

La profesora transformó un ejercicio del "banco de ejercicios", en un tercer estudio, sobre el espejo hiperbólico para determinar la tangente a una curva hiperbólica. El espejo hiperbólico ocupó una parte importante del tiempo y del esfuerzo en las tareas propuestas por la profesora. La profesora dividió la tarea en "etapas a seguir", generó ítems de completamiento, y detalló el tiempo disponible para realizar cada uno. Tales modificaciones, validan una vez más los IO sobre el tiempo, las ayudas al estudio y el profesor.

La profesora utilizó otros libros escolares para dar ejemplos y proponer actividades de entrenamiento en ciertos tipos de tareas sobre: ecuaciones de rectas, de circunferencias, puntos

simétricos, transformaciones de un tipo de ecuación a otro tipo. Esta selección de actividades, extraídas de los manuales usados habitualmente por la profesora y sus estudiantes, valida los IO referidos a las ayudas al estudio. Las siguientes acciones identificadas en las sesiones de clases se interpretan a la luz de los IO de la profesora, según se detalla en la Tabla 8.

Tabla 8: acciones de la Profesora e IO (Parra y Otero, 2021, p. 355)

| Acciones de la profesora | IO |
|---|---|
| Conserva el "contexto" de los espejos vinculándolo al programa. | contenido |
| Indica, marca y controla el tiempo. | tiempo |
| Indica a los estudiantes los resultados a los que deben llegar<br>Agrega representaciones en GeoGebra que ella realiza. | ayudas al estudio profesor |
| Recorta al 50% una presentación (diapositivas), propuesta por el libro, donde se presenta el potencial del REI y las obras posibles de estudiar. | tiempo |

## Discusión y Reflexiones

En situación de trabajo, los IO de la profesora convocan a esquemas de uso del REI, muy alejados del paradigma del cuestionamiento, en el cual el artefacto es concebido. Esto no es sorprendente, porque la profesora no puede sustraer sus acciones de las que son propias de la institución en donde trabaja hace más de treinta años.

Si bien los IO son personales, relacionan una clase de situaciones del trabajo de enseñanza en una institución, con un cierto esquema de uso. El nuevo artefacto para enseñar, resulta instrumentado e

instrumentalizado según un esquema forjado al cobijo de la ideología (Althusser, 1988) dominante en el liceo.

Es importante enfatizar los dos tipos de posiciones, que a su vez generan diferentes situaciones, en las cuales podemos ubicar a esta profesora y cómo cambia la relación, desde esas posiciones, que la profesora genera con el objeto/artefacto REI, lo cual, a su vez, se expresa en esquemas de uso diferentes, en situaciones muy diferentes.

Por un lado, ella participa del grupo de profesores que componen el equipo de investigación sobre la Didáctica de la Matemática de una Universidad. En ese sistema de referencia, la profesora cuestiona los ejercicios tradicionales y, de hecho, ha generado con ese grupo una propuesta de REI sobre la velocidad instantánea y el signo de la derivada para estudiantes de la escuela secundaria.

Por el otro, en la situación de enseñanza en el liceo y sus restricciones, tales como cumplir con planificaciones y exámenes comunes, los plazos y controles, etc., la misma profesora, realiza modificaciones al REI, que resultan en tareas propias del paradigma de la visita a las obras.

Ella organiza la enseñanza segmentando lo más posible el saber, controlando el tiempo, anulando el componente de investigación, etc. Todo esto se ejecuta en acto, sin que la profesora advierta en situación, que está actuando en contra del REI, que pretendía realizar y, precisamente aquí, se vivencia la ideología anti cuestionamiento. En cualquier caso, no se trata de una crítica hacia la profesora, sino de

poner en evidencia el potencial explicativo de la dupla esquema-situación y las dificultades de implantar un REI o cualquier dispositivo que propicie gestos didácticos de cuestionamiento, en un ambiente poco propicio para que sobreviva.

La profesora tiene amplia experiencia, su capacidad y conocimiento matemático son indudables, sin embargo, las modificaciones realizadas al REI para ajustarlo al programa de estudio, generan un instrumento muy alejado del artefacto REI original. Esto ocurre, porque la naturaleza de los gestos necesarios para llevar adelante un REI en un aula real, impiden adaptarlos a los programas, es a la inversa: los programas deberían formularse en función de los REI.

Con relación al detalle de las características y gestos didácticos propios de un REI, los IO identificados ocasionan la pérdida de generatividad de la pregunta generatriz y de su poder arborescente. Las tareas se convierten en guías de acciones a desarrollar y así, se anulan posibles gestos compatibles como, por ejemplo: que los estudiantes se formulen preguntas y busquen ellos posibles respuestas.

La ausencia de preguntas derivadas inhibe el componente de investigación como etapa inicial a la construcción de respuestas, e impide decidir sobre qué saberes del medio son o no útiles y bloquea los gestos propios de estudiar e investigar, “rastrear”, identificar y delimitar las posibles disciplinas y lo que ellas podrían aportar de su especificidad a la respuesta.

Como se ha mostrado, la profesora determina de antemano, de qué forma y con qué saber se deben resolver las tareas. En consecuencia, las decisiones tomadas por ella como directora del estudio, no dan lugar a explorar disciplinas y delimitar áreas. El recorrido se vuelve lineal y así, las entradas y salidas de los temas no ocurren. Por todo lo expuesto, es posible afirmar que la actividad didáctico-matemática de la profesora, de la cual los IO identificados son parte, no se condice con el pilotaje apropiado de un REI.

Estos resultados (Parra y Otero, 2021), son compatibles con los obtenidos por Gazzola & Otero (2021); Otero et al. (2020, 2021); Otero y Llanos (2019) en investigaciones que involucran a profesores en servicio que estudian la TAD, a la vez que son puestos en situaciones de organizar una enseñanza hipotética, basada en el cuestionamiento, a partir de diversos recursos.

A medida que los profesores se encuentran en situaciones donde su posición es más próxima al aula, el anti cuestionamiento y sus IO asociados ganan protagonismo, y la adaptación de los artefactos los vuelve cada vez más tradicionales. Sus investigaciones también muestran, el efecto del programa y del curriculum enseñado en la génesis de los profesores y tal como sucede en nuestro caso (Gueudet et al. 2018; Parra y Otero, 2021).

Si los IO presentes en esta situación laboral, no generan una actividad didáctico-matemática compatible con un REI, entonces ¿qué tipo de situaciones las generaría y cuál sería su génesis? Estas son tan solo una pequeña parte de las

cuestiones que nuestro trabajo deja abiertas frente a la posibilidad de realizar enseñanza por investigación en un aula real.

En este trabajo estudiamos la génesis instrumental de un REI que realiza una profesora matemática y didácticamente muy experimentada. Los invariantes operatorios que componen el esquema de uso del REI, no son absolutos. Por el contrario, son afectados por la situación de trabajo, las restricciones y condiciones institucionales, etc., y producen una asimilación del artefacto a un esquema de fuerte control, donde solo unos pocos gestos didácticos sobreviven.

Hipotetizamos que, en una situación más alejada del aula, o bien, en un contexto institucional más propicio, la actividad profesional resultaría diferente. Adherimos a una concepción desarrollista y pragmática de la formación profesional y somos optimistas. Sin embargo, no dejamos de advertir que la actitud del cuestionamiento del mundo y más específicamente del saber matemático, es en la actualidad, muy infrecuente.

Para que los profesores comprendan la importancia de desarrollar este cuestionamiento, es importante que posean la oportunidad de ejercerlo, quizás con recursos más acotados que el de un REI.

A raíz de los resultados obtenidos en este estudio de caso, donde hasta se dispone de un REI, como recurso, estrictamente hablando, con materiales de soporte para desarrollarlo, tareas, etc., vemos el peso del paradigma monumental y su ideología dominante en las actividades matemáticas de cuestionamiento, pero también de la ausencia total

del hábito del cuestionamiento en la formación del profesor y en la capacitación de los que están en servicio.

En esta línea y a continuación, describimos la investigación que realizamos durante una capacitación de profesores en servicio, con el enfoque instrumental (Rabardel, 1995, 2002; Bueno-Ravel & Gueudet, 2013; Gueudet & Trouche, 2008; Trouche, Gueudet, Pepin & Aldon, 2020). Se trata de profesores que estudian la TAD y analizan recursos habituales para enseñar y relativamente más próximos al saber enseñado por ellos, antes de enfrentarse con un REI.

## El cuestionamiento y los problemas escolares

Lo que denominamos enseñar en el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo, se abre paso en medio de grandes dificultades, muy lentamente. En consecuencia, aunque los REI sean el instrumento más apropiado para enseñar del que disponemos hasta ahora, su viabilidad en aulas reales, es escasa. Esto podría deberse a que, los esquemas de uso que los profesores construyen a partir de la variedad de recursos que emplean, no incluyen invariantes operatorios vinculados con acciones de investigación y cuestionamiento. En cualquier caso, es necesario realizar más investigación didáctica sobre el trabajo documental de los profesores con miras al cuestionamiento.

El enfoque instrumental (Rabardel, 1995) y su extensión: la aproximación documental de lo didáctico (ADD) (Gueudet y Trouche, 2009) más la noción de esquema e invariante operatorio de Vergnaud (1990, 1998, 2013) son herramientas teóricas apropiadas para saber más, sobre cómo los profesores usan ciertos problemas.

Es importante identificar los conocimientos profesionales de los profesores en términos de invariantes operatorios, cuando usan recursos didácticos. Los resultados que presentamos a continuación, nos permiten mostrar algunos resultados interesantes sobre cómo los profesores usan los problemas escolares, que podrían incluso favorecer el cuestionamiento y la indagación en la enseñanza.

El estudio, se realizó en el marco de un curso universitario de didáctica de la matemática del cual participan 39 (treinta y nueve) profesores de escuelas secundarias en servicio (Gazzola y Otero, 2021; Otero, 2020; Otero y Llanos, 2019; Otero et al., 2018).

Se seleccionaron tres ‘problemas escolares’ que integran el bloque curricular álgebra, que, además, es el que los profesores enseñan mayoritariamente y a veces de manera excluyente.

Los profesores, tienen que realizar las tres tareas siguientes: (1) resolver los problemas, (2) realizar una formulación matemática general y (3) organizar una enseñanza hipotética con ellos. Las respuestas a estas tareas, generan un elevado número de protocolos escritos, que son analizados para categorizar e identificar los invariantes operatorios subyacentes.

De este modo, se obtiene evidencia sobre el esquema de uso de los recursos y se conjetura sobre algunas características del sistema de instrumentos (Rabardel & Bourmaud, 2005), que orientarán futuras indagaciones.

Las preguntas de la investigación son:

¿Cuáles invariantes operatorias (IO) de los profesores se pueden identificar en la resolución de las tareas propuestas durante el curso?

¿Qué informan los IO identificados, sobre las características que tendrían los instrumentos generados por estos profesores a partir de los recursos propuestos?

¿Qué informan los IO sobre los sistemas de instrumentos de estos profesores?

## Los problemas escolares utilizados

Los 'problemas' (véase la Tabla 9) se eligieron intencionalmente y corresponden al bloque curricular denominado Álgebra.

El *Problema de José*, es una tarea típica, propia un manual escolar, al que los profesores se refieren como un 'problema de contexto'.

El *Problema de la Herencia*, aparece en el libro 3500 ejercicios de álgebra, Primer Curso, editado en 1960 para el ciclo básico común del Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio y, además, ha sido utilizado en las Olimpíadas matemáticas. Una versión reformulada, se utiliza en la investigación de Otero & Banks (2006) referida a cómo los estudiantes resuelven problemas, considerados algebraicos por los profesores y el curriculum.

Incorporar sin reflexión a los antiguos problemas aritméticos, a la enseñanza del álgebra escolar es una idea cuya inadecuación ha sido bien documentada por los didactas (Chevallard, 1989, 1990, Bolea, 2002; Bolea, Gascón y Bosch, 2001), pero ese conocimiento didáctico no penetra el ámbito escolar. Sus orígenes provienen de una ideología que reduce la enseñanza del álgebra escolar a la generalización de la aritmética (íbid). En la misma línea, el curriculum y la textualización incitan a los profesores, a realizar tareas muy alejadas de una actividad algebraica genuina, del tipo: *"traducir del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico"*.

Al respecto, vale la pena recordar que, el álgebra y la matemática no son lenguajes, sino conocimientos (Vergnaud, 1998). En particular la actividad algebraica, es por sobre todo escrita y se realiza a partir de un sistema de signos muy poderoso, justamente para eludir las arbitrariedades y ambigüedades del lenguaje natural. Pero las cosas no ocurren así en la escuela, donde el álgebra se considera erróneamente un lenguaje y en donde los viejos problemas aritméticos orales, se pretende que sean traducidos a símbolos escritos. Como si todo esto fuera poco, Otero y Banks (2006) muestran que los estudiantes de la escuela secundaria, dejados "a su aire", desarrollan además de soluciones aritméticas e intuitivas de este problema, formas algebraicas que evidencian una tendencia incipiente a la modelización algebraica y eluden la traducción secuencial.

El *Problema de los Fósforos* pertenece al diseño curricular de matemática de la provincia de Buenos Aires para 2do. año de la ESO. El currículum sugiere utilizar este tipo de problemas, para la iniciación al algebra escolar, encauzando las actividades hacia la generalización de la aritmética.

Tabla 9: problemas escolares presentados a los profesores

| El Problema de José | El Problema de la Herencia | El Problema de los Fósforos |
|---|---|---|
| En una granja hay conejos y cisnes, en total son 550 animales. Un observador cuidadoso | Un hombre distribuyó una suma de dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor le dio 1000 pesos más 1/10 de lo que le restaba, luego le dio 2000 al segundo más 1/10 del restante, al tercero le dio 3000 más 1/10 de y | Se construyen con fósforos los siguientes diseños: Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3 ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir el Diseño 6? ¿Y para construir el Diseño 100? |

| | | |
|---|---|---|
| contó 1580 patas. ¿Cuántos conejos y cuántos cisnes hay entonces? | así siguiendo hasta llegar al último hijo. Hecho esto cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió? | ¿Es posible construir una figura como la del modelo que tuviera 1500 fósforos? ¿y con 1822? Expliquen por qué. |

En el currículum, estos tres recursos, aparecen vinculados, a las *ecuaciones lineales en una incógnita y a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*.

## Las tareas propuestas a los profesores

Los problemas se distribuyeron aleatoriamente entre los profesores en servicio (PS), de manera que cada uno resolviera uno. Las tareas son:

Tarea 1 (T1). Resolver el problema de varias maneras posibles.

Aquí, los PS están en la posición de estudio y se quiere saber cómo ellos resuelven individualmente el problema -sin interactuar con los profesores del curso ni con sus pares-. Se solicitó resolver el problema de diferentes maneras, buscando que los PS exploraran la matemática involucrada, pues en general, ellos solo conciben las formas de resolver institucionalizadas por la escuela.

Los profesores del curso realizaron observaciones escritas sobre las resoluciones de los PS y luego se pidió la tarea siguiente:

Tarea 2 (T2). Reformular la entrega de T1 atendiendo a las sugerencias de los docentes del curso y las siguientes condiciones:

(a) Aumentar las formas de resolución asumiendo el lugar del alumno.

(b) Presentar una formulación general del problema.

En este caso, los PS continúan en la posición de estudio, se pretende que ellos reformulen su primera entrega y propongan formas de solución adaptadas a los alumnos, es decir, anticipaciones de lo que podría surgir en el aula, sino las hubiesen contemplado antes. También se intenta que los PS realicen una formalización, entendida como la abstracción de significado de cualquier sistema (o problema). Se asume que, una descontextualización del problema podría serles de utilidad para analizar los conocimientos matemáticos subyacentes.

Una vez más, los profesores del curso revisan y comentan por escrito la tarea, antes del encuentro on-line. Luego, se realizó un encuentro on-line de una hora de duración para cada problema, con el objetivo de compartir y discutir las distintas soluciones propuestas, así como los conocimientos matemáticos involucrados en ellas.

<u>Tarea 3 (T3). Reformular la entrega de T2, a partir del intercambio con los PC y colegas contemplando las siguientes condiciones:</u>

(a) Presentar/completar las soluciones posibles que pudieran faltarles.

(b) Presentar una formulación general del problema.

(c) Identificar qué podría enseñarse con el problema.

En esta última tarea, se espera que se tomen en cuenta, tanto las observaciones escritas realizadas por los docentes del curso como las surgidas del encuentro on-line. Además, los PS cambian su posición a enseñar y tendrían que considerar el conocimiento matemático que el recurso permite enseñar.

## Invariantes Operatorios Identificados

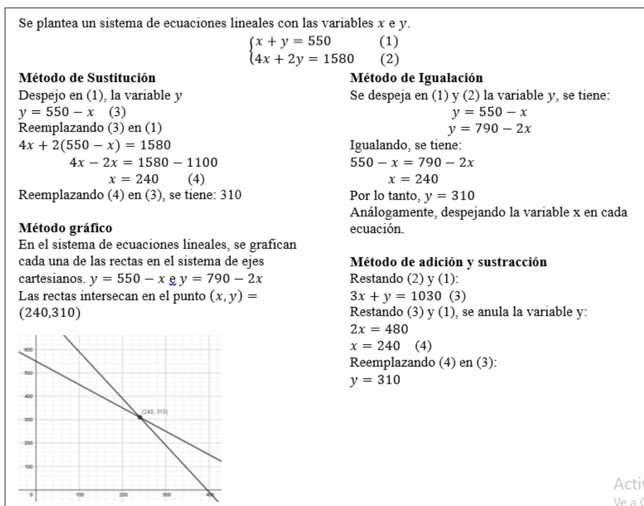
Los IO se identificaron en cada tarea propuesta durante el curso. En T1 los PS tenían que resolver el problema de diferentes maneras. La Tabla 10 resume los IO identificados. En la primera columna se enuncia el invariante operatorio y en la segunda, se describe brevemente el indicador que lo respalda.

Tabla 10: Invariantes operatorios identificados en T1.

| IO | Indicador |
|---|---|
| *“Este problema se asocia con un tema (único) del programa”* | Colocarse en la posición de profesor y relacionarlo con un único contenido de su programa. |
| *“Hay una forma escolar oficial de resolver este problema”* | Asumir la existencia de una forma preestablecida y casi única para resolver este problema la escuela. |
| *“Resolver este problema de matemáticas requiere encontrar una fórmula* | Utilizar una fórmula, que se obtiene casi directamente de su enunciado. |

| | |
|---|---|
| *siguiendo al enunciado”* | |

En todas las respuestas y de manera unívoca, los profesores relacionaron el problema de José con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, el problema de la herencia, con ecuaciones lineales con una incógnita y el problema de los fósforos, con ‘expresiones algebraicas’ como una extensión de la aritmética. Los PS “ubicaron” el problema en un lugar del programa, en un tema específico, para un año escolar determinado y lo resolvieron evidenciando el saber matemático que en la posición enseñar ellos relacionaban con ese problema. Esto se corresponde con el invariante operatorio: *“este problema se asocia a un tema (único) del programa”*.


Se plantea un sistema de ecuaciones lineales con las variables $x$ e $y$.

$$\begin{cases} x + y = 550 & (1) \\ 4x + 2y = 1580 & (2) \end{cases}$$

**Método de Sustitución**
Despejo en (1), la variable $y$
$y = 550 - x$ (3)
Reemplazando (3) en (1)
$4x + 2(550 - x) = 1580$
$4x - 2x = 1580 - 1100$
$x = 240$ (4)
Reemplazando (4) en (3), se tiene: 310

**Método gráfico**
En el sistema de ecuaciones lineales, se grafican cada una de las rectas en el sistema de ejes cartesianos. $y = 550 - x$ e $y = 790 - 2x$
Las rectas intersecan en el punto $(x, y) = (240,310)$

**Método de Igualación**
Se despeja en (1) y (2) la variable $y$, se tiene:
$y = 550 - x$
$y = 790 - 2x$
Igualando, se tiene:
$550 - x = 790 - 2x$
$x = 240$
Por lo tanto, $y = 310$
Análogamente, despejando la variable x en cada ecuación.

**Método de adición y sustracción**
Restando (2) y (1):
$3x + y = 1030$ (3)
Restando (3) y (1), se anula la variable y:
$2x = 480$
$x = 240$ (4)
Reemplazando (4) en (3):
$y = 310$

Figura 16: protocolo PS03, problema de José, T1

En cuanto a las soluciones, si bien la tarea solicitaba resolver el problema de varias maneras

posibles, los PS sólo consideraron una. Una vez que vincularon el problema con un contenido del programa, ellos parecen asumir que solo existe una forma preestablecida para resolverlo y se ciñen a ella. Así, en las respuestas al problema de José, se sujetaron al sistema de ecuaciones, que resulta de "traducir" secuencialmente el enunciado. El sistema fue resuelto utilizando mayoritariamente las técnicas tradicionales de sustitución e igualación, y en menor medida sumas y restas, determinantes o el denominado método gráfico (Figura 16).

Como el hijo$_1$ recibió: $H_1= 1.000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$

y el hijo$_2$ $H_2= 2.000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - (1000 + \frac{1}{10}x - 100)]$

y el problema dice que cada hijo recibió la misma cantidad de dinero, entonces planteo la ecuación: $H_1 = H_2$

$$1000+\frac{1}{10}(x - 1000) = 2000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - (1000 + \frac{1}{10}x - 100)]$$

$$1000+\frac{1}{10}x - 100 = 2000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - 1000 - x\frac{1}{10} + 100]$$

$$1000+\frac{1}{\sqrt{10}}x - 100 = 2000 + \frac{1}{\sqrt{10}}x - 200 - 100 - \frac{1}{10}x + 10$$

$$\frac{1}{100}x = 2000 - 200 - 100 + 10 - 1000 + 100$$

$$\frac{1}{100}x = 810$$

$$x = 810 \,.\, 100$$

$$x = 81000$$

Figura 17: protocolo PS27, problema de la herencia, T1

Las soluciones al problema de la herencia, en todos los casos, consisten en obtener las ecuaciones como una traducción secuencial y literal del enunciado, para el primer y segundo hijo. Luego, estas ecuaciones se igualan y se resuelven para obtener el monto total de la herencia (Figura 17).

El problema de los fósforos, fue resuelto a partir de una fórmula obtenida como generalización de los primeros tres o cuatro diseños, que relaciona la cantidad de fósforos con el número de orden del diseño. Esta fórmula se utilizó para calcular la cantidad de fósforos de un diseño determinado, o el número de orden del diseño para una cantidad de fósforos establecida (Figura 18).

Antes de responder las preguntas, observé detenidamente los diseños planteados nuevamente y establecí que:

Diseño 1: 4 fósforos

Diseño 2: 4 + 3 fósforos

Diseño 3: 4 + 2.3 fósforos

Diseño 4: 4 + 4.3 fósforos

Entonces la expresión algebraica que nos permite calcular de manera sencilla cualquier Diseño n-ésima es 4 + (n-1).3. Esta expresión permite determinar fácilmente la cantidad de fósforos necesarios para construir cualquier Diseño (n), donde n es un número Natural.

Figura 18. protocolo PS16, problema de los fósforos, T1.

Las soluciones de los tres problemas permiten identificar el IO: *"Existe una forma escolar oficial de resolver este problema"*. Los profesores buscan una fórmula que surge de traducir secuencialmente el enunciado, en lugar de relaciones expresadas matemáticamente. Esta parece ser, la manera casi excluyente que los PS usan en la escuela secundaria para resolver este tipo de "problemas matemáticos". Estas acciones respaldan el IO: *"Resolver este problema de matemáticas requiere encontrar una fórmula siguiendo al enunciado".*

La Tarea 2, requirió agregar nuevas soluciones posibles al problema, y generalizarlo. Además, los PS tenían que proponer soluciones intentando ponerse en la posición del alumno. Para cumplir con este requisito, mayoritariamente, ellos agregaron soluciones numéricas. También, le otorgaron al uso

de técnicas distintas -cuyo alcance o similitud con las restantes no fue considerada- el status de nueva solución. La Tabla 11 sintetiza los IO identificados en T2.

Tabla11: Invariantes operatorios identificados en T2.

| IO | Indicador |
|---|---|
| *“Cada forma de solución es independiente de las demás”* | Tratar aisladamente cada solución que se propone. |
| *“No es necesario relacionar las distintas soluciones entre sí”* | No vincular matemáticamente las posibles soluciones y no analizar su pertinencia. |
| *“En una formulación general, los parámetros del problema son fijos”* | Proponer como formulación general del problema ecuaciones con los parámetros fijos, según el enunciado. |
| *“Cualquier enunciado contextualizado es un problema extra-matemático”* | No cuestionar el potencial didáctico matemático ni la factibilidad de los enunciados propuestos. |

Por ejemplo, en el problema de José, una vez formulado el sistema de ecuaciones, la novedad residía en emplear una técnica diferente de solución del sistema de ecuaciones.

En el problema de la herencia, continuaron con la misma ecuación, pero esta vez, para hijos consecutivos diferentes de los que habían propuesto antes. En el tercer problema, realizaron operaciones con la fórmula y consideraron, por ejemplo, $f = 3n + 1$, en lugar de $f = 4 + (n - 1).3$, siendo $f$ la cantidad de fósforos y $n$ el número de diseño.

En todos los casos, los PS trataron a estas soluciones supuestamente "distintas" como si fueran independientes, sin relacionarlas matemáticamente. Esto se corresponde con el IO: *"cada forma de solución del problema está aislada de las demás"*.

Los PS no analizan el saber matemático subyacente, ni la actividad matemática que los problemas pueden o no generar, a excepción de proponer una fórmula que surge de traducir secuencialmente el enunciado.

Interpretamos que los IO son el producto de la relación esquema-situación, es decir, no son ni absolutos ni universales. En este caso, los PS no se colocaron en la posición de estudiar, sino en la de enseñar con un cierto problema-recurso. En esta posición, sus acciones se corresponden con el invariante operatorio: *"No es necesario tratar matemáticamente la vinculación entre las distintas soluciones de este problema"*.

Cuando los PS tuvieron que realizar una formulación matemática general para el problema y sus soluciones, usaron ecuaciones o fórmulas con los parámetros fijos del enunciado. Por ejemplo, en el problema de José (Figura 19) fijaron el número total de animales, de patas y la cantidad de patas de cada

tipo de animal, igual que en el problema escolar original.

**Solución General**

Para la resolución de este problema se deben plantear dos ecuaciones con dos incógnitas (Modelo Matemático de la situación planteada en el enunciado del problema), una correspondiente a la cantidad de patas (1), y la otra al total (2), de los animales:

$$\begin{cases} x + y = 550 \quad (2) \\ 4.x + 2.y = 1580 \quad (1) \end{cases}$$

Siendo 'x' la cantidad de conejos e 'y' la de cisnes.

Este sistema de ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver con varios métodos: 3 algebraicos (sumas y restas, igualación y sustitución) y 1 gráfico. Así también por el método de Matrices y Determinantes.

Figura 19. Protocolo PS12, problema de José, T2.

Con el problema de la herencia, los profesores procedieron de manera similar: el monto inicial que recibe el primer hijo y la proporción del resto (aquí 1/10) que le corresponde a cada uno (Figura 20).

Solución general:

$H_1 = \text{H}$

$H_2 = \text{Hijo 2}$

$T = \text{Total de la herencia}$

$$H_1 = 1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)$$

$$H_2 = 2000 + \frac{1}{10}(T - 2000 - \left[1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)\right]$$

Igualamos $H_1$ y $H_2$:

$H_1 = H_2 \Rightarrow$

$$1000 + \frac{1}{10}(T - 1000) = 2000 + \frac{1}{10}(T - 2000 - \left[1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)\right]$$

Figura 20: protocolo PS23, problema de la herencia, T2.

En el problema de los fósforos (Figura 21) fijaron el número de lados de la figura original.

| |
|---|
| **FORMA GENERAL:** |
| Una forma general para poder resolver la situación planteada es mediante el uso de una fórmula matemática, como la siguiente: |
| $Cant.\, de\, fosforos = 3.n + 1$ **siendo n el número del diseño solicitado** |

Figura 21. Protocolo PS29, problema de los fósforos, T2.

Si bien podría decirse que, el problema de la herencia admite una traducción directa y los otros dos no, aquí se observa que los PS conservan fijo el valor de los parámetros iniciales en las ecuaciones, y que las consideran generales. Esto soporta el IO: *"en una formulación general los parámetros del problema son fijos".*

En las respuestas a esta tarea, se observa que los PS parecen asumir que, cualquier enunciado propuesto en términos de objetos del mundo de la vida y operaciones matemáticas entre ellos, tiene carácter 'extra-matemático', aunque carezca de sentido o sea obsoleto. Esto es compatible con el IO: *"Cualquier enunciado contextualizado, es un problema extra-matemático".*

Debido a los resultados obtenidos en T2, el eje central del encuentro on-line con los docentes del curso, fue la formulación matemática general de los problemas. En esa sesión se trataron las nociones de variable, parámetro y descontextualización.

La tarea 3, está relacionada con los posibles usos didácticos de los problemas. Aquí, se solicitaba completar las soluciones posibles, revisar la generalización realizada antes y analizar qué saberes matemáticos se enseñarían con estos recursos en la escuela. En la Tabla 12 se presentan los IO identificados.

Tabla 12: IO identificados en T3.

| IO | Indicador |
|---|---|
| *“Cada sistema de representación es una nueva solución”* | Considerar “soluciones nuevas” a los distintos sistemas de representación, sin cuestionar el saber matemático en juego. |
| *“Los problemas escolares deben tener un contexto”* | Los problemas tienen que tener un contexto “real”. Desconsiderar problemas matemáticos, aun cuando el contexto es trivial. |
| *“Los problemas escolares deben tener una solución numérica”* | Eludir la formulación general y fijar los parámetros como únicos, para encontrar una solución numérica. |
| *“Los problemas de enunciado textual son apropiados para enseñar álgebra en la escuela”* | Destacar la importancia de los enunciados de los problemas para construir expresiones algebraicas. |

Los PS completaron las soluciones posibles, incorporando diferentes sistemas de representación: gráficos cartesianos, soluciones numéricas y en algunos casos, el uso de TICs, sin cuestionar el saber matemático subyacente. Como en las dos tareas previas, se observa un tratamiento aislado e independiente de cada solución propuesta.

En relación al uso de distintos sistemas de representación, los PS lo consideran valioso "per se", sin cuestionarse matemáticamente sobre eso. En la mayoría de las producciones escritas de esta última tarea, ellos destacan sin dar razón, las bondades de resolver un mismo problema en distintos sistemas de representación. Sin embargo, no explotan los nuevos conocimientos que esta actividad matemática trae consigo. Estas acciones se corresponden con el IO: *"Cada sistema de representación es una nueva solución"*. Si bien esta afirmación podría resultar válida desde una perspectiva cognitiva, en el plano didáctico amerita algunas consideraciones que se discutirán más adelante.

Considerando la formulación matemática general, en la tarea tres, la mayoría de los PS formalizó el problema, pero, aunque aquí los parámetros no se fijaron de antemano, ellos mantuvieron el contexto original: animales, cantidad de patas, hijos, herencia, polígono regular. Esto se corresponde con el IO *"Los problemas escolares deben tener un contexto"*.

Por otro lado, si bien lograron generalizar el problema, esto no alcanzó a las soluciones propuestas. Cuando resolvieron el problema, los PS retomaron los parámetros iniciales y hallaron a una solución aritmética única. Estas acciones se corresponden con el IO: *"Los problemas escolares deben tener una solución numérica".*

En la tarea tres, los PS se estaban en la posición enseñar y tenían que considerar qué saber podían enseñar con el recurso. Aquí, ellos volvieron a relacionar el problema con el mismo tema del programa que en la tarea uno: sistemas de

ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones lineales y expresiones algebraicas, sin cuestionar el saber matemático a enseñar.

Los siguientes extractos de protocolos referidos a qué enseñar con los problemas, contienen expresiones tales como "modelización de situaciones extra matemáticas" o "traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico", que se corresponden con el IO *"Los problemas de enunciado textual son apropiados para enseñar álgebra en la escuela"*

PS22 "La importancia que tienen la resolución de estos problemas deriva al uso de técnicas de resolución basadas en la traducción del lenguaje verbal al algebraico." (problema de la herencia).

PS06 "El problema puede servir para representar algebraicamente la situación extramatemática planteada mediante ecuaciones y buscar la solución…" (problema de José).

PS38 "resolver la situación problemática a través de ecuaciones y fórmulas que respondan a un sistema más general que permita hallar la solución al problema." (problema de la herencia).

PS17 "Considero que la siguiente situación problemática se la podría proponer a alumnos de 1° año ES o 2° año como iniciación al trabajo algebraico, buscando las regularidades en esta situación extra matemática ..." (problema de los fósforos).

Los PS están habituados a "traducir" los enunciados del lenguaje natural, a símbolos algebraicos (a los que suelen llamar, erróneamente, lenguaje simbólico o algebraico). Esto, es propio de considerar que la enseñanza del álgebra escolar

(Bolea, Gascón y Bosch, 2001; Ruiz Munzón, Bosch & Gascón, 2015) tiene como razón de ser el reemplazo de enunciados verbales, por fórmulas.

## Algunas reflexiones

En la tarea 1, los profesores tenían que resolver el problema y estudiarlo para explorar su potencialidad matemática. Sin embargo, ellos se ubicaron en la posición enseñar, en el contexto de la escuela y con su programa de estudios.

Si bien se había solicitado resolver el problema de varias maneras posibles, debido a que ellos lo vincularon directamente con un tema del programa, sólo resolvieron de una sola forma. Los invariantes operatorios muestran que esta forma única es "oficial" en la escuela y tiene por objetivo encontrar "la" fórmula. Pero esto no es lo que hacen los alumnos. Por ejemplo, si consideramos el problema de la herencia, Otero y Banks (2006) muestran que cuando los estudiantes resolvieron algebraicamente, consideraron los restos y operaron con ellos, de manera muy diferente a la propuesta por los profesores. En esta posición, los PS se apegan a las fórmulas que surgen de "traducir" el lenguaje natural a un supuesto "lenguaje" simbólico.

En síntesis, los IO que se identifican en esta tarea, se refieren a asociar el recurso con un tema del programa y a asumir una forma escolar de resolverlo que se reduce a una fórmula.

La Tarea 2 fue motivada en parte, por la resistencia de los profesores a estudiar el problema. Debido a esto, se les preguntó por soluciones alternativas y por una generalización matemática.

Para cumplir con lo solicitado, ellos presentaron y trataron como alternativas, a formas de resolver los problemas que, desde un punto de vista matemático, no lo eran.

En la escuela se suele otorgar valor al hecho de resolver un ejercicio de diversas maneras, sin embargo, esto no es universal a menos que las distintas soluciones sean cuestionadas, analizadas y comparadas en función de la actividad matemática que se intenta realizar. En este caso los profesores trataron aisladamente cada solución propuesta y no analizaron matemáticamente sus vinculaciones. Estas acciones son coherentes con los IO identificados en la tarea anterior, a los que se agrega el IO vinculado a los parámetros de las fórmulas, a los cuales se considera fijos.

Entonces, frente a la tarea de generalizar el problema y así encontrar diversas soluciones posibles, emergen los IO vinculados con la supuesta necesidad de generar un contexto para los problemas de matemática, incluso cuando este sea muy trivial. Por lo tanto, en esta tarea, los profesores no generalizan los parámetros y conservan fijos todos los valores numéricos del enunciado.

Finalmente, la Tarea 3, encontró a los profesores posicionados de manera anticipada como enseñantes, pues aquí nunca asumieron la posición de estudio. El hecho de que, como primera acción, cada recurso sea vinculado con un tema del programa -autoevidente y transparente- inhibe cualquier actividad de estudio y cuestionamiento. Es decir que, los profesores asimilan el recurso a su esquema de enseñanza habitual.

Los PS incorporaron distintos sistemas de representación: numérico, algebraico o gráfico, a los cuales tratan aisladamente. Ellos usan el denominado método gráfico, sólo para mostrar y verificar el punto de intersección de las rectas, sin tratarlas como nuevos objetos de saber, propios del marco geométrico-analítico.

La generalización solicitada en esta última tarea, resultó obstaculizada porque los PS permanecieron atados al contexto original: animales, patas, herencia, fósforos, polígonos regulares, en completo acuerdo con los IO identificados. Sin embargo, aunque finalmente en la mayoría de los casos lograron formalizar el problema, no hicieron lo mismo con la solución. En esta instancia, ellos fijaron nuevamente los parámetros para encontrar un único resultado, como es habitual en la escuela. Para responder la pregunta sobre qué podría enseñarse con los problemas propuestos, los profesores solo mencionaron el “paso del lenguaje coloquial al simbólico”.

Los IO identificados muestran que, los recursos se asimilan con un esquema de uso fuertemente condicionado por la vinculación del recurso con un tema del programa enseñado. Dichos IO no se condicen con una actividad matemática caracterizada por el estudio, la investigación y el cuestionamiento.

La vinculación mencionada permite hipotetizar que el programa enseñado sería el instrumento pivote en el sistema de instrumentos de los profesores.

El uso que los profesores realizan de los recursos, no debería interpretarse como una carencia de habilidades matemáticas que les impediría estudiar el problema, generalizarlo y generar nuevo conocimiento a partir de él. Más bien, se diría que ellos buscan actuar eficazmente en una situación de trabajo, y en consecuencia utilizan los recursos propuestos a según los esquemas de uso que poseen y que la situación convoca. Estos esquemas se han gestado a lo largo de su vida profesional en la escuela secundaria, y se fundamentan en una pedagogía de larga tradición, que no contempla el cuestionamiento.

## Reflexiones finales

En este texto hemos tratado de sintetizar las investigaciones de casi una década sobre la formación de profesores en el marco de la TAD.

Nuestra meta, es formar profesores en el paradigma del cuestionamiento. Para eso, se necesitan recursos apropiados, como por ejemplo REIs. Sin embargo, si bien disponer de esos recursos es fundamental, al parecer, el salto que suponen para el profesor, desde el punto de vista didáctico-matemático es demasiado grande.

Primero, pensamos que se trataba de que los profesores no tienen suficientes conocimientos matemáticos para enseñar, sin embargo, esto no parece tan así, al menos los profesores de secundaria. Mas bien se trata de cómo los profesores leen la situación profesional en la que se encuentran, y en función de eso, qué actividad despliegan.

La TAD pone de manifiesto que existen gestos didácticos esenciales para dirigir un REI, o para estudiar una pregunta en la escuela. Esos gestos tienen que ver siempre con una actitud de cuestionamiento y de estudio.

Los trabajos más recientes muestran que los profesores no tienen en sus esquemas invariantes operatorios para desplegar una actividad de cuestionamiento cuando enseñan. Por eso, cualquier recurso, aunque sea un REI, es incorporado a esquemas inapropiados y modificado a partir de ellos, en una dirección frecuentemente no deseada.

Además, el problema se incrementa porque los sistemas de instrumentos y de recursos de los profesores son muy complejos y tienen un elemento alrededor del cual giran o pivotan: ese elemento parece ser el programa o al menos ciertas áreas del programa, a partir de las cuales, en una situación profesional, rápida y eficazmente se inicializa el uso que se va a dar a un recurso de enseñanza.

En este sentido, hemos identificado que los recursos apropiados para iniciarse en la enseñanza por indagación tienen que guardar una distancia apropiada con el programa teórico y el real, para evitar esta captura que anula toda posibilidad de cuestionamiento.

En las próximas investigaciones, que estamos realizando pero que no reportamos aquí, vamos a abordar el papel de los pivotes y de los sistemas de instrumentos-documentos.

Por ahora y siguiendo al escritor argentino Jorge Luis Borges, asumimos que los libros, no se terminan, sino, se abandonan.

# Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 205-224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

Adler, J. (2012). Knowledge resources in and for school mathematics teaching. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* pp. 3-22. NY: Springer.

Adúriz-Bravo, A. & Ariza, Y. (2014). Una caracterización semanticista de los modelos científicos para la ciencia escolar. *Bio-grafía, 7(13),* 25-34.

Achinstein, P. (1968). *Concepts of science*. Baltimore: Johns Hopkins Press.

Artaud, M. ; Cirade, G. & Jullien, M. (2011). « Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale ». En M. Bosch, et. Al. (Eds.), *Un panorama de la TAD,* 769 – 794. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51,* 241-247.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). "Knowing mathematics for teaching: ¿Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?" *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed.,* pp. 433-

456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59 (5),* 389-407.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas (Tesis doctoral)*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Barquero, B.; Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29 (3),* 339-352.

Bellenoué, F. ; Chevalarias, N. ; Chauvin, P. ; Dhérissard, S.; Ducos, C.; Gaud, D.; Grillet, M.; Jussiaume, L.; Kirch, C.; Mesnier, W. & Minet, N. (2014). *Enseigner les mathématiques en 1ère S : Trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique.* Poitiers: IREM de Poitiers.

Benedikt Freya, C. & Osborne, M. A. (2017). The future of employment: How susceptible are Jobs to computerisation? *Technological Forecasting & Social Change 114,* 254–280.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (2003). *Second International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A. P.

Black, M. (1954). Metaphor. *Proc Aristotelian Soc* 55:273–294.

Black, M. (1962). Models and metaphors. Cornell University Press, Ithaca, NY.

Blanchard, M.R., Southerland, S.A., & Granger, E.M. (2009). No silver bullet for inquiry: Making senses of teacher change following an inquiry-based research

experience for teachers. *Science Education, 93(2),* 322-360.

Bolea, P. (2002), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Bolea, P. Bosch, M. y Gascón, J. (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 21 (3)* pp. 247-304. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.

Bourdieu, P. (2001). *Science de la science et réflexivité.* Raisons d'être, Paris. Traducción (2003). *El oficio de científico. Ciencia de la ciencia y reflexividad.* Barcelona : Anagrama.

Bourmaud, G. (2006). Les systèmes d'instruments : méthodes d'analyse et perspectives de conception. (Tesis inédita en psicología ergonómica). Université Paris 8.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (1),* 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Boido, G., Flichman, E. y Yagüe, J. (1988). *Pensamiento científico.* (Tomo I y II). Bs. As.: ProCiencia-Conicet.

Bueno-Ravel, L., Gueudet, G. (2013). L'approche instrumentale des genèses d'usages : le cas des bases d'excercices en ligne. En J.-B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages, dispositifs et genéses.* Octarès, pp. 55-70. Toulouse.

Bunge, M. (1972). *Teoría y realidad.* Barcelona: Ariel.

Bunge, M. (1973). *Method, Model and Matter.* Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2519-5

Bruner, J. S. (1961). El acto de descubrimiento. *Harvard Educational Review, 31 (1),* pp. 21-32.

Cardeñoso, J. M., Flores, P. & Azcárate, P. (2001). “El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática”. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática,* pp. 233-244. Granada: Universidad de Granada.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., & Cooper, J. (2019). Introducing CERME’s Thematic Working Group 6 – Applications and Modelling. *Newsletter of the European Mathematical Society,* 111, 48–49.

Cassini, A. (2011). Teorías y modelos según Klimovsky. *Análisis Filosófico XXXI Nº 1,* 69-87.

Chappaz, J. et Michon, F. (2003). Il était une fois…. La boite du pâtissier. *Grand N, 72,* 19-32.

Charpak, G., Léna, P., & Quéré, Y. (1998). *La main à la pâte.* Bulletin de l’Union des Physiciens, 806, 1149-1150.

Charpak, G., Léna, P., & Quéré, Y. (2005). *L’enfant et la science. L’aventure de La main à la pâte.* Paris : Odile Jacob.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l’arithmétique a l’algébrique dans l’enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L’évolution de la transposition didactique, *Petit x, (5),* 51-94

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage (2e éd.1991). [Traducida al español: Chevallard Y (1997) *La transposición´ didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Buenos Aires]

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19,* 45- 75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petite x, 23.* 5-38.

Chevallard Y. (1991). Postface à la seconde édition. Dans : Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 2e édition 1991, 199-233.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12/1,* 73-112.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2),* 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. Séminaire national de didactique des mathématiques. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14

Chevallard, Y. (2001b). Aspectos problemáticos de la formación docente, XVI, Jornadas del SI-IDM, Huesca. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2001c). Les mathématiques et le monde : dépasser « l'horreur instrumentale ». *Quadrature, 41,* pp. 25-40.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinaire. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition

didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique de la didactique. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. Disponible en : http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009a) La notion de PER : problèmes et avancées. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009b) Didáctica Fundamental: Foro de cuestiones. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2011) Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2012) Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. 12th International Congress on Mathematical Education. 8 – 15 July, 2012, Seoul, Korea. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2012a). Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Journal du seminaire TAD/IDD. Disponible en : http://www.aixmrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2011-2012/journal-tad-idd-2011-2012-7.pdf

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2(2),* 161-182. doi: 10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2013a). Journal du Séminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf

Chevallard, Y. (2013b). Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1. Enquête codisciplinaire & EDD. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Chevallard, Y. (2013c). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Libros del Zorzal: Buenos Aires, Argentina.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1),* 159-169.

Chevallard, Y. ; Joshua M. A. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Chevallard Y. & Bosch M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170-174). Springer, Dordrecht.

Chevallard Y. & Sensevi, G. (2014). Anthropological approaches in Mathematics Education, French perspectives. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 38 - 42)*. Springer, Dordrecht.

Crawford, B.A. (2007). Learning to teach science as inquiry in the rough and tumble of practice. *Journal of Research in Science Teaching, 44(4),* 613-642.

Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum.* Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education.* New York: Macmillan.

Dewey, J. (1920). Reconstruction in Philosophy and Essays, vol. 12 de *The Middle Works of John Dewey,* Southern Illinois University Press, 1988.

Donvito, A., Otero, M. R. & Sureda P. (2014). Actitudes de la Pedagogía de la Investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. *Ikastorratza, 12,* 1-20.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R., & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education.* London: Lawrence Erlbaum Ass.

Eurydice. (2006). L'enseignement des sciences dans les établissements scolaires en Europe. États des lieux des politiques et de la recherche. Bruxelles : Commission Européenne. Direction Générale de l'Éducation et de la Culture.
http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/thematic_studies_archives_en.php.

Falgueras, J. (1994). Unidad de noción bajo los usos del término modelo en las ciencias matemáticas y factuales. *Contextos, XII/*23-24, pp. 221-224.

Farrington, B. (1974). *Mano y cerebro en la Grecia Antigua.* Madrid.

Fennema, E. & Loef, M. (1992). Teacher' Knowledge and its impact. In D.A. Grows (ed.). *Handbook of Research on Mathematicis Teaching and Learning*, 147-163.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). "Understanding teaching and classroom practice in mathematics". En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 225-256. Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

García, F.J., Gascón, J., Ruíz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. ZDM: The International Journal on Mathematics Education,38(3), 226-246.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática, vol. 6, núm. 3,* 52-64.

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathemathiques, Vol. 18, Nº 1* :7-34.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Revista SUMA, 44,* 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Revista SUMA, 45,* 41-52.

Gazzola, M. P. (2018). *Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria Tesis doctoral*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Gazzola, M. P., Otero, M. R. & Llanos, V. C. (2020). Acciones didácticas en el desarrollo de un Recorrido de Estudio y de investigación que involucra a la Matemática y a la Física en la escuela secundaria. Perspectiva Educacional, 59 (1), 52-80. doi: 10.4151/07189729-Vol.59-Iss.1-Art.1006.

Giménez-Rodríguez J., Font V., Rubio N. & Planas N. (2009). "Competencias profesionales en el máster de profesorado de secundaria". *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51,* 9-18.

Gimeno Sacristán, J. (1986). Formación de los profesores e innovación curricular. *Cuadernos de Pedagogía, 139*, pp. 84-86.

Gengarelly, L.M., & Abrams, E.D. (2009). Closing the gap: inquiry in research and in the secondary science

classroom. *Journal of Science Education and Technology*, *18* (1), pp. 74-84.

Giere, R.N. (1988). *Explaining Science: A Cognitive Approach.* Chicago: University of Chicago Press.

Giere, R. N. (1999). *Science without laws.* Chicago: University of Chicago Press.

Giere, R. (2004). How Models Are Used to Represented Reality. *Philosophy of science, 71(5),* 742-752. https://doi.org/10.1086/425063

Gueudet G. & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique, 2(3)* 7-33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71(3),* 199-218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Gueudet, G., Lebaud, M.P., Otero, R. y Parra, V. (2018). Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche : une étude de cas en Première S. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 38(3),* 275-314. https://revue-rdm.com/2018/travail-documentaire-des-professeurs-et-parcours-detude-et-de-recherche-une-etude-de-cas-en-premiere-s/

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development.* New York: Springer.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: documentation geneses and professional geneses. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 23-41). NY: Springer.

Gyllenpalm, J., Wickman, P. & Holmgren, S. (2010). Secondary science teachers' selective traditions and examples of inquiry-oriented approaches. *Nordic Studies in Science Education (6) 1,* 44-60.

Hesse, M. B. (1953). Models in physics. *Br J Philosophy of Science, 4*, 198–214.

Hesse, M. B. (1961). *Forces and fields: the concept of action at a distance in the history of physics*. Thomas Nelson & Sons, London.

Hesse, M. B. (1966) Models and analogies in science. University of Notre Dame Press, South Bend, In Hestenes D (1987). Toward a modelling theory of physics instruction. *American Journal of Physics, 60(8),* 732–748.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). "Unpacking pedagogical content knowledge of students". *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S., & Ball, D. L. (2004). Developing measueres of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105 (1),* 11-30.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). "Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters". En F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Jorde, D. (2009). Inquiry-based science teaching- an overview of what we know and what we do. Paper presented at the ESERA conference, Istanbul, August 31-September 4. Disponible en: http://www.esera2009.org/.

Klimovsky, G. (1990). Las diversas acepciones de la palabra 'modelo' y el ejemplo del Capítulo VII de La interpretación de los sueños, reimpreso en Klimovsky (2004), *Epistemología y psicoanálisis*. Volumen II: Análisis

del psicoanálisis, Buenos Aires, Ediciones Biebel, pp. 162-179.

Kim, S. (2015). Les besoins mathématiques des Non-Mathématiciens quel destin institutionnel et social ? Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques. (Thèse doctorale). Université Aix-Marseille.

Kuhn, T. (1983). *La Structure des révolutions scientifiques.* Champs Flammarion : France.

Leatherdale, W. H. (1974). *The role of analogy, model and metaphor in science.* Oxford University Press, Oxford.

Lebart, L.; Morineau A. & Fenelon, J. P. (1985). *Tratamiento Estadístico de Datos.* Barcelona: Marcombo.

Lipowski, K., & Seidel, T. (2009). Existing models of teacher professional development on IBST in seven European countries. In Mind the Gap FP7 project 217725, (Deliverable 6.1). http://www.uv.uio.no/english/research/projects/mindingthegap/Deliverables/index.html

Llanos, V. C., Otero, M. R. & Gazzola, M. P. (2019). Physics and Mathematics models in a co-disciplinary Study and Research Paths (SRPs) in the pre-service teacher education. International Journal of Physics and Chemistry Education, 11(3), 67-72.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime, 18 (2),* 245-275. DOI: 10.12802/relime.13.1824

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013a) Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 73,* 17-24. Valencia, España

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013b) La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde : une étude

longitudinale dans l'école secondaire argentine. *Review of Science, Mathematics and ICT Education. Re SM TICE, 7 (1)*, 27-46. Universidad de Patras, Grecia.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013c) The Research and Study Paths in the secondary school: the case of the polynomial functions of the second degree. *Journal Problems of Education in the 21st Century,* 52 (52), pp. 60-71. Scientific Methodical Center, Lithuania.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). "Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners". In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Lombardi, O. (2010). Los modelos como mediadores entre teoría y realidad. En L. Galagovsky (coord.), *Didáctica de las ciencias naturales: El caso de los modelos científicos,* pp. 83-94. Buenos Aires.

Lombardi, O. (2011). La noción de modelo en ciencias. *Educacion en Ciencias, 2 (4)*, pp. 5-13.

Luft, J. A. (2001). Changing inquiry practices and beliefs: the impact of an inquiry-based professional development programme on beginning and experienced secondary science teacher. International Journal of Science Education, 23(5), 517-534.

Minner, D. D.; Levy, A. J. & Century, J. (2009) Inquiry-Based Science Instruction – What Is It and Does It Matter? Results from a Research Synthesis Years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching, 47 (4),* 474-496.

Morrison, M. C., & Morgan, M. (1999). Models as mediating instruments. In M. Morgan & M. Morrison (Eds.), *Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science (Ideas in Context, pp. 10-37)*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511660108.003

Morrison, M. C. (1998). Modelling nature: Between physics and the physical world. Philosophia Naturalis, 35, 65-85.

Moscoloni, N (2011). *Las nubes de datos: métodos para analizar la complejidad.* Rosario: UNR Editora.

Oliveira Lucas, C. (2015). Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional. Tesis doctoral. Universidad de Vigo. Departamento de Matemática Aplicada I,

Otero, M. R. (2004) *Imágenes y Enseñanza de la Física: Una visión Cognitiva.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos, España. ISBN 84-96394-01-8, depósito legal: 285-2004, 376 páginas.

Otero, M. R. (2019). *Competencias ¿para qué?* Unicen, Tandil.

Otero, M. R. y Banks Leite, L. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1) México.

Otero, M. R. y Gazzola, M. P. (2021). Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemática en servicio. PNA, en prensa.

Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2019). Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 8(2),* 193-225. doi: 10.4471/redimat.2019.3618

Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2021). The Gap Between Studying a Generating Question and Planning Lessons Based on It. In: Barquero B., Florensa I., Nicolás P., Ruiz-Munzón N. (eds) *Extended Abstracts Spring 2019. Trends in Mathematics, vol 13.* Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_8

Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Buenos Aires: Dunken.

Otero, M. R., Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Arlego, M. (2016). Co-disciplinary Physics Mathematics research and study course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. *Review of science, mathematics and ICT education, 10 (2),* 55-78.

Otero, M. R., Llanos, V. C., Parra, V. y Sureda, P. (2014). Pedagogy of research and questioning the world: teaching through research and study paths (RSP) in secondary school. *Review of science, mathematics and ICT education, 8 (1)*, 7-32.

Otero, M. R., Moreira M. A. y Greca, I., (2002). El Uso de Imágenes en Textos de Física. *Revista Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias.* UFRGS, Brasil. http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/v7_n2_a2.htm

Otero, M. R.; Arlego, M. y Muñoz Guzman, E. (2019). Relativity of simultaneity in secondary school: an analysis based on the Theory of the Conceptual Fields. *Journal of Physics: Conference Series*. http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1287/1/012002

Otero, M. R.; Fanaro, M. A. y Llanos, V. C, (2013) La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias 8 (1),* 77-89.

Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C. y Arlego, M. (2015). Recorridos de estudio y de investigación codisciplinares a la física y la matemática en tres grupos de estudio: profesores en formación, estudiantes de secundaria e investigadores. V Encuentro Iberoamericano sobre Investigación en Enseñanza de las Ciencias (V EIBIEC). Universidad de Burgos.

Otero, M. R.; Llanos, V. C. y Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización, 1 (2),* 31-42. Universidad Central de Chile.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Arlego, M. y Gazzola, M: P. (2017). Co-disciplinary Mathematics and Physics Research and Study Courses (SRC) within two groups of pre-service teacher education. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10) pp. 2972-2979. Dublin, Ireland.

Ostermeier, C., Prenzel, M., & Duit, R. (2009). Improving Science and Mathematics Instruction: The SINUS Project as an example for reform as teacher professional development. *International Journal of Science Education, 32(3),* 303-327.

Park Rogers, M.A., & Abell, S.K. (2008). The design, enactment, and experience of inquiry-based instruction in undergraduate science education: a case study. *Science Education*, *92* (4), 591-607.

Parra, V. y Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. *Educación Matemática 29(3),* 9-50.

Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13 (2),* 1 - 18.

Parra, V. y Otero, M. R. (2021). Operational Invariants and Instrumentalization of Artefact Study and Research Path for High School: A Case Study. *Acta Scientiae, 23(6), 334-362*.

Peralta, M. H.; Ercoli, N. L.; Godoy, M. L.; Rivas, I.; Montanaro, M. I. y Bacchiarello, R. (2008). Proyecto

estructural de la réplica de la piedra movediza: comportamiento estático y dinámico. XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural.

Postman, N. & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity.* New York: Dell Publishing Co. 219p.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. En P. Rabardel, P. Pastré (dir.), Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement. Paris, France: Octarès.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículo y formación de profesorado, 8(1),* 1-15.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media: ¿Por qué y cómo? *Educación Matemática, 17(2),* 35-58.

Rojas, R. (1912). *La Piedra Muerta.* Martín García (Ed). Buenos Aires.

Rojas, F. y Deulofeu, J. (2015). El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la «tensión» estudiante-formador. *Enseñanza de las Ciencias, 33 (1),* 47-61.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1322.

Ruiz, Munzón N.; Bosch, M.; Gascón, J. (2007). La modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En Ruiz-Higueras L.; Estepa A.; García F. J. (eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Universidad de Jaen.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo

didáctico. *REDIMAT, Vol 4(2),* 106-131. doi: 10.17583/redimat.2015.1386

Salgado, D., Otero, M. R. y Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al Cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional. Formación de profesores, 56(1),* 84-108.

Salgado, D., Otero, M. R. y Parra, V. (2019). A praxeological model of reference related to costs calculation: comparison with the ones developed in a research and study path at university level. *Revista Unión, 55 (1),* 54-70.

Saviani, D. (1984). Las Teorías de la Educación y El Problema de la marginalidad en América Latina. *Revista Colombiana de Educación, (13).* https://doi.org/10.17227/01203916.5099

Schwab, J. (1962). The teaching of science as enquiry. In *The teaching of science (pp. 1-103).* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En : A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M., Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp.835-857).* Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-22.

Sierra, T. (2007). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. http://eprints.ucm.es/7373/

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP. Álvarez, F. (1990). Reverenter Absolvit: Nadie ha inventado la Historia. Manuscrits: Revista d'història moderna, 8, 87-104.

Suppes, P. (1960). A Comparison of the Meaning and Use of Models in Mathematics and Empirical Sciences", *Synthèse, 12*, 287-301.

Tang, X., Coffey, J., Elby, A. & Levin, M. (2010). The scientific method and scientific inquiry: Tensions in teaching and learning, Science Education, 94: 29–47.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B., & Aldon (2020). *L'approche documentaire du didactique.* DAD Multilingual. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02512596/document

van Fraassen, B. C. (1980). The Scientific Image. Oxford: Oxford University Press.

van Fraassen, B. C. (1989), Laws and Symmetry. Oxford: Oxford University Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 167-181.

Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In: Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática (pp. 1-25). Tandil, Argentina.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? Infancia y aprendizaje, 36(2), 131-161.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wartofsky, M. W. (1966) The model muddle: proposals for an immodest realism. In his models: representation and scientific understanding. Reidel, Dordrecht, The Netherlands, pp 1–11.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. Educ Stud Math 83, 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

World Economic Forum. (2016). The Future of Jobs Employment, Skills and Workforce Strategy for the Fourth Industrial Revolution. Global Challenge Insight Report Recuperado el 13-02-2020 de: http://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs.pdf

World Economic Forum. (2017). Los trabajos del futuro y dos habilidades que necesita para obtenerlos. Recuperado el 13-02-2020 de: https://www.weforum.org/es/agenda/2017/05/los-trabajos-del-futuro-y-dos-habilidades-que-necesita-para-obtenerlos/.

Windschitl, M., Thompson, J. & Braaten, M. (2008), Beyond the scientific method: Model-based inquiry as a new paradigm of preference for school science investigations. Sci. Ed., 92: 941-967. https://doi.org/10.1002/sce.20259

Zanotti L. J. (1972). Etapas Históricas de la Política Educativa. Buenos Aires, Eudeba.

